Le concept de duration : une présentation heuristique

Par Jacques Bair

Mots clés : duration et duration modifiée ; convexité et convexité modifiée ; approximation linéaire ou quadratique ; situation déclenchante ; heuristique.

Résumé. *La duration est fondamentale en mathématiques financières. Nous la présentons de deux manières complémentaires qui sont qualifiées de classique et d'heuristique. La seconde méthode nous paraît originale et bien adaptée pour amener les élèves à effectuer un travail de recherche sur un problème concret et pour appliquer de nombreux concepts classiquement enseignés dans les programmes de mathématiques.*

1 Introduction

Au cours de son existence, toute personne rencontre un jour ou l'autre l'univers financier puisqu'elle est (ou peut être) confrontée à un crédit, un emprunt hypothécaire, des actions, des obligations, ...

Les mécanismes financiers sont souvent assez sophistiqués, parfois réservés à des spécialistes. Néanmoins, leurs principes de base font appel à des mathématiques élémentaires et classiques figurant dans les programmes de l'enseignement secondaire ; ils pourraient dès lors être avantageusement abordés dans la formation mathématique de nos jeunes. D'une part, les élèves recevraient ainsi des connaissances scientifiques qui leur permettraient, le cas échéant, de négocier des contrats intéressants et de ne pas se laisser influencer par des publicités pouvant trop favoriser les organismes financiers. D'autre part, le professeur trouverait des applications concrètes et motivantes pouvant illustrer certaines matières plus théoriques et abstraites.

Nous nous intéressons dans cet article à la théorie des obligations. Celle-ci repose sur les principes de la capitalisation et de l'actualisation qui sont notamment présentés dans [3]. Pour la bonne compréhension de ce texte, rappelons que la valeur d'un même capital évolue au cours du temps. Si celui-ci vaut C_0 au moment initial $t = 0$ et que le taux d'intérêt est égal à r, le capital en un temps t quelconque est égal à $C_t = C_0 \times (1 + r)^t$; si t est positif, auquel cas on se réfère au futur par rapport à l'instant initial, la valeur de départ sera augmentée des intérêts générés pendant la période du placement, ceux-ci étant supposés ici *composés* en ce sens qu'ils rapportent eux-mêmes des intérêts : c'est le *principe de capitalisation.* Par contre, si le temps t est négatif, ce qui revient à considérer le passé par rapport au temps initial, la valeur C_t, qualifiée d'*actualisée*, était moins importante que C_0 puisque cette somme est alors multipliée par le facteur $\frac{1}{(1+r)^{-t}}$ qui est inférieur à 1 : c'est le *principe d'actualisation.*

Dans un premier temps, nous rappelons succinctement comment est introduite classiquement la duration d'une obligation ; cette présentation avait été réalisée en détail dans [1].

Puis, nous développons plus longuement une approche inhabituelle de ce concept : elle est introduite d'abord sur un exemple détaillé avant d'être généralisée ; elle se veut *heuristique* en ce sens qu'elle favorise la découverte progressive de ce qu'est réellement cette notion.

Nous concluons cet article en comparant les deux approches, classique et heuristique, d'un point de vue pédagogique et à la lumière de notre expérience personnelle.

2 Rappels sur la présentation classique

Revenons brièvement sur la manière dont la duration est le plus souvent présentée. Comme, dans la suite, nous développons en détail un exemple numérique, nous nous contentons ici de rappeler les principales définitions données dans [1] et de préciser les notations qui sont utilisées ultérieurement ; des applications concrètes peuvent être trouvées dans l'article cité ci-dessus ainsi que dans d'autres références reprises dans la bibliographie.

Nous allons étudier une *obligation.* Il s'agit d'une valeur mobilière représentative d'un emprunt contracté par une société ou un pouvoir public auptès de plusieurs prêteurs, appelés des *obligataires*, pour une durée et un montant déterminés. Sa durée de vie, encore appelée sa *maturité*, est notée M et est supposée entière. Elle donne lieu à des *coupons* annuels qui sont proportionnels au montant inscrit sur le titre et baptisé la *valeur nominale* V, le coefficient de proportionnalité étant le *taux nominal* τ. Elle est remboursable *in fine* et *au pair*, c'est-à-dire au terme de la $M^{\text{ème}}$ année et à sa valeur nominale. Elle est caractérisée par son *prix* P qui est, par définition, la somme des valeurs actualisées des sommes engendrées par le contrat sur la durée de vie, le taux d'actualisation étant le *taux du marché* r ; plus précisément, on a en formule,

$$P = \sum_{t=1}^{M} \frac{V \times \tau}{(1+r)^t} + \frac{V}{(1+r)^M} = \sum_{t=1}^{M} \frac{A_t}{(1+r)^t}$$

où $A_t = V \times \tau$ pour $t = 1, \ldots, M-1$, et $A_M = V(1+\tau)$.

Supposons dorénavant le taux du marché r variable. Le prix P varie en sens inverse, ce qui s'explique mathématiquement par la négativité de la dérivée du prix par rapport au taux ; on a en effet

$$\frac{dP}{dr} = -\sum_{t=1}^{M} tA_t\,(1+r)^{-t-1} < 0$$

Cette dérivée première est étroitement reliée au concept étudié dans cet article.

On appelle *duration* de l'obligation la date moyenne, notée D, à laquelle le détenteur percevra les flux monétaires auxquels son obligation lui donne droit. En d'autres termes, D est la vie moyenne des flux actualisés (par rapport à la date initiale du contrat) au taux du marché, les poids de pondération étant les valeurs actualisées des flux relativisées par le prix ; en formule,

$$D = \sum_{t=1}^{M} p_t t$$

où $p_t = \frac{A_t}{P(1+r)^t}$. On voit dès lors que

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P}{1+r}D$$

À la duration est souvent préférée la *duration modifiée*, encore appelée *sensibilité*, notée D_m et définie par

$$D_m = -\frac{D}{1+r}$$

De la sorte, on a $D_m = -\frac{D}{1+r}$. Ce coefficient est donc lié à l'élasticité du prix par rapport au taux du marché, puisque

$$D_m = \frac{\frac{dP}{dr}}{P}$$

En conséquence, une variation Δr du taux engendre une variation ΔP du prix vérifiant cette approximation (linéaire)

$$\frac{\Delta P}{P} \approx D_m \Delta r$$

3 Une nouvelle présentation

Nous allons présenter le concept de duration d'une autre manière, en partant d'un exemple (simple et fictif). Pour exposer cette méthode, nous nous sommes inspiré de l'article [7] .

3.1 Exemple numérique

Intéressons-nous à une obligation de valeur nominale 1000 unités monétaires, remboursable in fine et au pair, de maturité 4 ans, assortie d'un taux nominal de 3 % ; au départ, nous supposons que le taux du marché est aussi égal à 3 % et qu'il est supposé constant pendant la durée du contrat. Concrètement, l'obligataire recevra un coupon de $1000 \times 0,03 = 30$ unités monétaires à la fin de chacune des quatre années suivant le moment initial et, de plus, la valeur nominale de 1000 unités monétaires lui sera remboursée à la date de maturité. En conséquence, la valeur globale actualisée de ces montants est, au moment initial, égale à

$$V_0(0,03) = \frac{30}{1,03} + \frac{30}{1,03^2} + \frac{30}{1,03^3} + \frac{1030}{1,03^4} = 1000$$

Ceci n'est rien d'autre que le prix de l'obligation au taux du marché. Ainsi, lorsque les taux nominal et du marché coïncident, il y a bien équilibre entre les cashs flows actualisés (au début du contrat) positifs et négatifs ; de fait, la valeur prêtée au temps $t = 0$, et qui est une somme négative pour l'obligataire, vaut la valeur au temps $t = 0$ de la totalité des montants positifs que recevra le prêteur, c'est-à-dire la somme des coupons annuels et du remboursement final actualisés au moment initial.

Lorsque le taux du marché augmente (resp. diminue), le prix de l'obligation diminue (resp. augmente). Par exemple, pour $r = 0,04$, on a

$$V_0(0,04) = \frac{30}{1,04} + \frac{30}{1,04^2} + \frac{30}{1,04^3} + \frac{1030}{1,04^4} \cong 963,70$$

Plus généralement, pour un taux du marché égal à r, on dispose de cette égalité

$$V_0(r) = \frac{30}{1+r} + \frac{30}{(1+r)^2} + \frac{30}{(1+r)^3} + \frac{1030}{(1+r)^4} = f(r)$$

Envisageons à présent la revente potentielle du contrat à différentes moments. La valeur de l'obligation en un temps t arbitraire (compris entre le moment initial et la date de maturité) et au taux du marché r, s'obtient, dans la théorie de l'intérêt composé, en multipliant la valeur initiale par le facteur $(1+r)^t$, de sorte que la valeur correspondante, notée $V_t(r)$ est donnée par

$$V_t(r) = f(r) \times (1+r)^t = F(t,r)$$

En particulier, la valeur au temps $t = 1$ se compose de la somme du premier coupon (au moment de l'évaluation) et des valeurs actualisées (en ce même temps $t = 1$) des autres coupons et du remboursement ; en formule

$$V_1(r) = 30 + \frac{30}{(1+r)} + \frac{30}{(1+r)^2} + \frac{1030}{(1+r)^3}$$

Semblablement, la valeur au temps $t = 2$ s'obtient en ajoutant la valeur capitalisée du premier coupon au moment de l'évaluation, du coupon ainsi que des valeurs actualisées (en ce même instant $t = 2$) des deux derniers coupons et de la valeur nominale remboursée, soit

$$V_2(r) = 30 \times (1+r) + 30 + \frac{30}{(1+r)} + \frac{1030}{(1+r)^2}$$

Plus généralement, si nous faisons varier à la fois le taux du marché r et la date t de revente du contrat, nous obtenons le tableau suivant

$V_t(r) = F(t,r)$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$r = 0,02$	1080,02	1101,62	1123,65
$r = 0,03$	1060,9	1062,73	1125,51
$r = 0,04$	1042,34	1084,03	1127,39

Nous pouvons constater que

a) à taux r constant (ce qui revient à se déplacer sur une même ligne du tableau), la valeur croît avec le temps ;

b) à temps t constant (donc en restant au sein d'une même colonne), la valeur décroît avec le taux pour $t = 2$ et pour $t = 3$, mais est croissante pour $t = 4$.

Bien entendu, il est possible de compléter ce tableau en calculant la valeur de l'obligation pour des dates non entières, ainsi que pour des valeurs du taux intermédiaires à celles considérées, des conclusions similaires aux deux citées ci-dessus pouvant être tirées. Une telle observation soulève la question suivante : existe-t-il une date D de revente pour laquelle les valeurs de l'actif ne sont pas affectées par des variations de taux ? En d'autres termes, est-il possible de trouver une colonne du tableau élargi, qui correspondrait donc concrètement à une date $t = D$, au sein de laquelle les valeurs de l'obligation ne sont ni croissantes, ni décroissantes en fonction du taux, mais bien constantes ?

Avant de répondre à cette question, soulevons-en une deuxième qui lui semble à première vue corrélée, mais distincte. Considérons cette fois les rendements de l'actif. Pour comprendre aisément de quoi il s'agit, reprenons des données signalées ci-dessus. Nous avons vu que, lorsque le taux du marché passe de 3 % à 4%, la valeur de l'obligation après trois ans est de 1084,03. Comme la valeur nominale, estimée au temps $t = 0$ est de 1000, l'accroissement de la valeur correspond à un rendement de l'actif qui se mesure par un taux x tel que $1000 \times (1 + x)^3 = 1084,03$, soit $x = 1,08403^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,02726$. Plus généralement, le rendement x correspondant à un temps t pour un taux du marché r est tel que

$$1000 \times (1 + x)^t = F(t, r) \iff x = \left(\frac{F(t, r)}{1000}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = \Phi(t, r)$$

En appliquant cette dernière formule aux données numériques adoptées jusqu'à présent, on trouve le nouveau tableau (en n'y conservant que les cinq premières décimales) :

$x = \Phi(t, r)$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$r = 0,02$	0,039238	0,032785	0,029574
$r = 0,03$	0,03	0,03	0,03
$r = 0,04$	0,02095	0,02726	0,03043

Une observation de ces valeurs numériques conduit aux conclusions suivantes :

a) à taux r constant, le rendement est décroissant par rapport au temps pour $r = 0,02$, est constant pour $r = 0.03$, et croît pour $r = 0,04$;

b) à temps t constant, le rendement décroît en fonction du taux pour $t = 2$ et pour $t = 3$, mais est croissant pour $t = 4$.

À nouveau, le tableau pourrait être étoffé par diverses valeurs intermédiaires du temps et du taux, mais l'examen des valeurs numériques obtenues suggère cette nouvelle question : existe-t-il une date de revente pour laquelle le rendement n'est pas affecté par des variations de taux ? En supposant que ces deux dates D et D' existent, elles pourraient a priori différer. Demandons-nous alors si elles coincident.

En utilisant par exemple un tableur, on peut obtenir empiriquement une réponse aux questions posées. En effet, par tâtonnements, il est possible de trouver numériquement

$$D = D' = 3,82677$$

On en déduit que $F(D, r) = 1119,76$ pour tout r, auquel cas le rendement est de 0,03, soit le taux du marché initial. Dans le jargon financier, on parle dans ce cas d'*immunisation* contre une faible variation du taux d'intérêt.

À la lumière de cet exemple et en reprenant les notations introduites jusqu'à présent, nous pouvons traiter le cas général de manière rigoureuse.

3.2 Raisonnement mathématique

Provisoirement, fixons le temps en le notant t_0, valeur qui nous est inconnue à ce stade du raisonnement. Faisons varier le taux du marché r, de sorte que la valeur de revente en t_0 et le rendement correspondant apparaissent comme étant des fonctions de la seule variable r ; elles sont définies respectivement par

$$f(r) = F(t_0, r) = V_0(r) \times (1 + r)^t = f(r) \quad \text{et} \quad \phi(r) = x = \Phi(t_0, r) = \left(\frac{f(r)}{V}\right)^{\frac{1}{t_0}} - 1$$

Nous recherchons donc un instant t_0 tel que les fonctions f et ϕ cessent d'être décroissantes sans être encore croissantes et sont dès lors constantes ; a priori, l'instant relatif à f peut différer de celui pour ϕ.

En termes mathématiques, la constance d'une fonction se traduit (sous des hypothèses qui sont ici vérifiées) par l'annulation de sa dérivée première. Or,

$$f'(r) = \left(\sum_{t=1}^{M} \frac{(-t) \times A_t}{(1 + r)^{t+1}}\right) \times (1 + r)^{t_0} + t_0 \times \left(\sum_{t=1}^{M} \frac{A_t}{(1 + r)^t}\right) \times (1 + r)^{t_0 - 1}$$

tandis que

$$\phi'(r) = \frac{1}{t_0} \left[\frac{f(r)}{V}\right]^{\frac{1}{t_0} - 1} \frac{1}{V} f'(r)$$

On constate aisément que

$$f'(r) = 0 \Longleftrightarrow \phi'(r) = 0$$

Dès lors, l'instant cherché est unique : il s'obtient en résolvant l'équation, en l'inconnue t_0, obtenue en annulant f', ce qui donne

$$t_0 = \frac{\sum_{t=1}^{M} \frac{t \times A_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{M} \frac{A_t}{(1+r)^t}}$$

ou encore avec les notations adoptées ci-dessus

$$t_0 = \sum_{t=1}^{M} t \times p_t \quad \text{où} \quad p_t = \frac{A_t}{P \times (1 + r)^t}$$

On retrouve ainsi la duration qui a été présentée dans la section précédente. On peut donc effectivement en conclure que $D = D' = t_0$.

4 Comparaison des deux présentations

Nous avons présenté succinctement deux façons différentes d'introduire le concept de duration : d'une part, nous avons rappelé la méthode classique analysée en détail dans [1] et, d'autre part, nous avons développé plus en profondeur les débuts d'une nouvelle méthode qualifiée ci-dessus d'heuristique. Bien entendu, dans les deux cas, le problème étudié aurait pu être présenté plus ou moins directement, notamment en partant d'un même exemple concret servant de « situation déclenchante » ; par ailleurs, des prolongements théoriques et approfondissements similaires auraient pu compléter les deux études.

Sans tenir compte du degré de profondeur choisi, un professeur, amené à enseigner cette matière, pourrait se demander laquelle des deux méthodes doit être privilégiée. Il est clair que son choix doit être effectué en fonction du contexte particulier dans lequel s'insère son enseignement et doit tenir compte de multiples paramètres dépendant de ses connaissances personnelles et du temps pouvant être consacré à la matière, mais également liés au programme d'études, aux aptitudes, aux motivations et aux goûts de ses élèves, ... Au surplus, l'adoption de l'une de ces deux méthodes peut aussi être influencée par la nature du travail que le professeur souhaite proposer à ses étudiants.

Nous allons fournir quelques arguments relatifs à ce dernier propos en comparant les deux méthodes à la lumière de notre expérience professionnelle. Pour souligner la subjectivité de notre analyse, la fin de ce texte est rédigé au moyen de phrases dont le sujet est à la première personne non plus du pluriel mais bien du singulier.

Pendant de nombreuses années, j'ai enseigné la méthode classique à de futurs ingénieurs de gestion ; c'était dans un cours sur la modélisation mathématique figurant au programme de la deuxième année des études organisées à l'Université de Liège. Je suivais alors la progression suivante :

1. introduction du contexte, du vocabulaire, des notations et des hypothèses ;
2. présentation d'un exemple concret ;
3. exposé du problème théorique étudié, à savoir l'étude de la variation du prix en fonction du taux du marché ;
4. calcul de la dérivée de la fonction donnant le prix par rapport au taux ;
5. constation de l'intervention d'une moyenne pondérée dans la dérivée de cette fonction ;
6. définition et interprétation du concept de duration ;
7. application de la duration pour donner une estimation (linéaire) du prix, avec introduction de la duration modifiée ;
8. calcul de la dérivée de la duration par rapport au taux ;
9. constatation de l'apparition d'une variance pondérée dans la dérivée seconde du prix ;
10. introduction et interprétation du concept de convexité ;
11. application du concept de convexité pour donner une estimation (quadratique) du prix, avec introduction de la convexité modifiée ;
12. exemple concret avec interprétation des résultats.

Il me semble que les étudiants n'éprouvaient aucune difficulté particulière avec cette matière dont ils maîtrisaient les pré-requis de base ; au surplus, ils semblaient intéressés de voir que les concepts mathématiques appris antérieurement étaient utiles pour résoudre un problème concret rencontré dans un domaine vers lequel ils se destinaient professionnellement. De mon côté, je trouvais aussi cette matière motivante à présenter, pour les motifs évoqués ci-dessus (tout en restant bien conscient du fait qu'un « décalage motivationnel » est toujours possible) ; j'appréciais particulièrement son évolution que je trouvais progressive et logique. Á la réflexion, je trouve que cette présentation convient bien pour un enseignement de type *ex cathedra*, en ce sens qu'elle est fort directive : c'est effectivement l'enseignant qui dicte le plan à suivre et les élèves sont invités à suivre assez passivement les différentes étapes de l'exposé.

Pendant ma carrière active, j'ignorais la nouvelle méthode proposée dans cet article. En conséquence, je ne l'ai évidemment pas enseignée. Il m'apparaît aujourd'hui que cette nouvelle présentation mériterait d'être expérimentée auprès d'étudiants, car elle peut se faire en suivant intégralement le plan donné ci-dessus, mais en y intercalant les points suivants qui me paraissent intéressants au niveau de la formation des étudiants :

- 3*bis* construire les tableaux donnant les différentes valeurs de revente de l'obligation et les rendements correspondants ;
- 3*ter* se rendre compte que l'on cherche un temps pour lequel les valeurs et les rendements restent constants ;
- 3*quater* calculer, puis annuler les dérivées des fonctions donnant les valeurs de revente et les rendements ;
- 4*bis* résoudre l'équation obtenue en annulant la dérivée de la fonction donnant les valeurs de revente.

Il me semble aujourd'hui que l'apparition de ces points additionnels peut motiver l'introduction des items ultérieurs, ce qui rend probablement la méthode plus heuristique : elle invite les étudiants à devenir plus actifs dans la recherche de la réponse aux questions qu'ils peuvent se poser, à relier un problème concret à des concepts mathématiques étudiés antérieurement, à être aussi bien créatifs (pour trouver une réponse numérique) que rigoureux (grâce à une démonstration générale et incontestable). Au surplus, cette approche posséde, à mon avis, trois caractéristiques intéressantes d'un point de vue psychologique :

a) elle constitue un véritable défi en ce sens qu'après la construction des deux tableaux, on ne sait pas trop comment procéder bien que l'on dispose pourtant d'objectifs très clairs (en termes d'immunisation) ; le passage du problème concret à la théorie mathématique adéquate est de la sorte facilité ;

b) elle n'est ni trop facile, ni trop difficile pour les étudiants ; elle leur offre des opportunités de mettre en œuvre des compétences acquises lors de leur formation mathématique antérieure, ce qui est assurément motivant ;

c) elle favorise un feed-back immédiat car un contrôle instantané de la validité des résultats est possible ; de plus, un tel contrôle peut être réalisé au moyen de deux types de raisonnements complémentaires, à savoir, d'une part, un raisonnement plausible [1] en obtenant une réponse numérique par tâtonnements, puis un raisonnement démonstratif par le traitement mathématique du problème.

Or, d'après les recherches de Mihaly Csikszentmihalyi [2] datant de la fin du siècle dernier, ces trois caractéristiques (de défi, d'opportunité et de feed-back) sont des conditions essentielles et nécessaires pour réaliser une « expérience optimale » qui débouche généralement sur une sensation de « flux [3] ». Ces mêmes travaux de psychologie ont également mis en évidence le fait suivant (d'après [5], p. 103) : entrer en flux procure du bonheur !

Remerciement. C'est Daniel Justens qui m'a fait connaître la méthode heuristique ainsi que la référence [7]. De plus, il a bien voulu relire mon texte et me faire profiter de son expertise dans le domaine de l'actuariat. Qu'il en soit vivement remercié.

Références

[1] Bair J., Étude d'une obligation au moyen de sa duration et de sa convexité, *Mathématique et Pédagogie*, 120, 1998, pp. 61 - 69.

[2] Bair J. - Crama Y. - Henry V. - Justens D., *Modèles mathématiques en gestion*, éditions Cassini et Pole, Paris, 2011.

[3] Bair J. - Hinnion R., Justens D., *Applications économiques au service de la mathématique*, brochure de la S.B.P.M.e.f., 1989.

[4] Bair J. - Justens D. Maron S. - Rosoux J., *Applications pédagogiques de la mathématique financière*, édition Luc Pire, Bruxelles, 2001.

[5] Janssen T., *Le défi positif. Une autre manière de parler du bonheur et de la bonne santé*, Pocket, Paris, 2011.

[6] Polya G., *Les mathématiques et le raisonnement "plausible"*, Gauthier - Villars, Paris, 1958.

[7] Vaguener F., Duration et convexité : les outils d'une gestion active d'une compagnie, Collection Bibliothèque Tangente, *Les maths des assurances*, HS 57, Paris, 2016, pp. xxxx

1. D'après la terminologie de Polya [6], on peut classer les raisonnements en deux catégories en fonction de la nature de la conclusion tirée. Lorsque celle-ci est probable, le raisonnement est *plausible* et lorsqu'elle est certaine, il est dit *démonstratif*.

2. Il est le fondateur de la psychologie positive.

3. Le flux (*the flow* en anglais) est un état mental atteint par une personne qui est complètement absorbée dans son occupation, au point de ne plus se rendre compte du temps qui passe : elle se trouve alors dans un état maximal de concentration, de plein engagement envers la tâche en cours, puis de grande satisfaction quand cette dernière est accomplie positivement.