Pensées (mathématiques) de Tao

Jacques Bair

Mots clés : Bonnes mathématiques, étapes dans l'apprentissage des mathématiques, rigueur, intuition, métacognition, résolution de problèmes.

1. Une biographie succincte

Terence (Chi-Shen) Tao est né le 17 juillet 1975 en Australie, de parents intellectuels : son père est médecin (pédiatre), et sa mère est diplômée en mathématiques et en physique. Il apprend à lire et à écrire dès l'âge de deux ans et fait rapidement preuve de talents extraordinaires pour les études, et en particulier pour les mathématiques. À six ans, il construit ses premiers programmes informatiques (en langage BASIC) en faisant notamment référence à Fibonacci. Il publie en 1983 son premier article [13] où il fournit un programme (toujours en BASIC) pour trouver les nombres parfaits ([1]), en exploitant un résulat d'Euclide affirmant qu'un nombre de la forme $2^{p-1}(2^p-1)$ est parfait si le nombre 2^p-1 est premier. À l'âge de 8 ans, il subit avec succès différents tests montrant qu'il possède déjà (et au moins) un bagage mathématique habituellement atteint à l'issue d'études secondaires, tels le SAT ([2]) : par exemple, il est alors capable de dériver des fonctions et d'appliquer le concept de dérivée pour tracer la représentation graphique correspondante, il sait calculer des aires à l'aide d'intégrales, il peut reconnaître une structure de groupe ; on peut trouver différentes questions qui lui ont été posées à cette époque, ainsi que ses réponses, dans l'article [4]. Deux ans plus tard, il est le plus jeune participant aux Olympiades internationales et y gagne une médaille de bronze ; les deux années suivantes, il décroche une médaille d'argent, puis une médaille d'or, ce qui est évidemment exceptionnel pour un jeune de 13 ans. Il n'a que 17 ans quand il termine son Master en Mathématiques à l'université Flinders en Australie. Trois ans plus tard, il reçoit le diplôme de docteur à l'université américaine de Princeton. A l'âge de 24 ans, il est nommé *full professor* à l'université de Californie à Los Angeles (UCLA) ; il y enseigne encore aujourd'hui.

Il a été récompensé par de multiples prix internationaux, dont la médaille Fields (en 2006), ce qui est assurément la récompense la plus prestigieuse pour un jeune mathématicien. En 2012, il a encore reçu le célèbre prix Crafoord, conjointement avec le belge Jean Bourgain, pour « leur travail brillant et novateur dans les domaines suivants : analyse harmonique, équations aux dérivées partielles, théorie ergodique, théorie des nombres, combinatoire, analyse fonctionnelle et informatique théorique. » Ses travaux mathématiques sont nombreux ([3]), profonds, originaux et de première importance ; le lecteur intéressé par la découverte de « plusieurs travaux de T. Tao [qui] comprennent des parties des mathématiques que tout le monde comprend ([4]) » peut consulter la référence [5].

Terence Tao est donc un « surdoué » des mathématiques. Il est encore présenté comme étant « un mathématicien sympathique, modeste, aimant travailler avec ses collègues. Il s'intéresse à l'enseignement et à la diffusion des mathématiques vers tous les publics, il est curieux et poursuit des travaux simultanément dans plusieurs domaines de recherche [...] T. Tao est considéré par de nombreux chercheurs comme le plus grand génie vivant des mathématiques . » ([5], p. 150).

Visiblement, il semble apprécier les moyens de communication modernes. Il est en effet aisé d'obtenir, sur internet, des photos de lui ou des vidéos. On peut trouver, sur son site de l'UCLA, ses articles (même en prépublications), ses livres, son blog intitulé *What's new*, dont il sera question ultérieurement.

([1]) Un nombre entier est dit *parfait* lorsqu'il est égal à la somme de tous ses facteurs, le 1 étant inclus dans la liste des diviseurs mais le nombre lui-même en étant exclu ; par exemple, 6 est un nombre parfait car $6 = 1 + 2 + 3$.
([2]) Le *Scholastic Aptitude Test* est une épreuve connue, un peu semblable au « baccalauréat » français.
([3]) En 2012, il avait déjà rédigé plus de 150 articles scientifiques de haut vol et 6 livres ([5], p. 151).
([4]) Nombre de ses résultats ne sont réellement accessibles qu'à de rares experts internationaux.

2. Quand des mathématiques sont-elles bonnes ?

Il est assez rare qu'un mathématicien de tout premier plan, dont la carrière est loin d'être terminée, prenne le temps d'écrire, dans une revue spécialisée et réputée, ses idées sur la nature profonde des mathématiques. C'est pourtant ce qu'a réalisé T. Tao en publiant un article sur le sujet [14].

Voici un aperçu de ce travail ; il se veut fidèle à l'original pour ne pas dénaturer les idées de l'auteur ; il est donc essentiellement une traduction (libre) d'extraits de l'article initial.

Au début de sa note, T. Tao constate l'existence de multiples types différents de mathématiques et dresse une liste d'une vingtaine d'entrées pouvant évoquer de bonnes mathématiques (en fait, il recense 22 items, dont le dernier consiste en les mots « etc., etc. » indiquant clairement qu'il est possible de trouver bien d'autres cas). Voici 10 de ces entrées, les termes utilisés étant ceux de l'auteur lui-même. Cette sélection est subjective : elle est basée sur des goûts personnels ; elle ne reprend donc pas forcément les points les plus importants (d'ailleurs, T. Tao écrit lui-même qu'il n'existe aucun ordre entre ses critères) ; par ailleurs, elle ne reflète qu'une part (pratiquement la moitié) des arguments cités dans le texte original.

Selon T. Tao, de bonnes mathématiques peuvent se référer à

1. une bonne résolution de problème mathématique (par exemple, une découverte capitale relative à un problème mathématique important) ;
2. une bonne théorie mathématique (par exemple, une structure conceptuelle ou un choix de notations qui systématiquement unifie et généralise un ensemble existant de résultats) ;
3. une bonne application mathématique (par exemple, concernant d'importants problèmes en physique, en science de l'ingénieur, en informatique, en statistique, etc., ou d'un champ des mathématiques à un autre) ;
4. une bonne pédagogie mathématique (par exemple, une lecture ou un style d'écriture qui permet à d'autres d'apprendre et de faire des mathématiques plus efficacement, ou des contributions à l'enseignement) ;
5. une bonne vision mathématique (par exemple, un programme à long terme et productif ou un ensemble de conjectures) ;
6. des mathématiques rigoureuses (avec des détails correctement et soigneusement donnés entièrement) ;
7. des mathématiques belles (par exemple, les identités extraordinaires de Ramanujan ; des résultats qui sont aisés (et jolis) à énoncer mais pas à prouver) ;
8. des mathématiques élégantes (par exemple, le concept de « preuves issues du Livre » de Paul Erdös ([5]) atteignant un résultat difficile avec un minimum d'effort) ;
9. des mathématiques profondes (par exemple, un résultat qui est manifestement non trivial, notamment en saisissant un phénomène subtil au-delà de la portée d'outils plus élémentaires) ;
10. des mathématiques intuitives (par exemple, un argument qui est naturel et aisément visualisable).

T. Tao, qui insiste sur le caractère non exhaustif de sa liste (ici réduite de moitié, rappelons-le à nouveau), signale que celle-ci met en évidence la dimension élevée du concept de « bonne qualité » en mathématiques. Selon lui, ceci est dû au fait que les mathématiques elles-mêmes sont complexes et de grande dimension, et qu'elles progressent de manière inattendue et adaptative. Chacune des facettes énoncées représente une voie différente qui permet à la collectivité d'améliorer la compréhension et l'usage du sujet. L'auteur estime également qu'il n'est pas possible de trouver un accord universel sur les poids qui peuvent être attribués aux différentes qualités recensées. Cette impossibilité peut être expliquée par des considérations tactiques ou culturelles ; elle reflète également la diversité dans l'aptitude mathématique. Il pense encore que la nature variée et multifacette de bonnes mathématiques est globalement très salutaire pour les mathématiques, dans le sens où cela nous permet de poursuivre de nombreuses approches différentes du

([5]) Paul Erdös (1913 - 1996) fut un mathématicien hongrois prolifique, auteur de plus de 1500 articles scientifiques, dont de nombreux en collaboration avec plus de 450 auteurs. Il disait volontiers que tout mathématicien, croyant ou non, devrait admettre que Dieu possède un grimoire, le Grand Livre, dans lequel sont rassemblées les plus élégantes démonstrations des théorèmes mathématiques. Il se pencha sur de multiples problèmes mathématiques ; il émit encore diverses conjectures, dont celle appelée de Erdös - Turan.

sujet, et d'exploiter différents types de talent mathématique, dans la direction de notre objectif commun d'un plus grand progrès et d'une meilleure compréhension des mathématiques.

Après avoir étudié un cas particulier (dans une partie plus technique), à savoir le théorème de SZEMERÉDI (6), T. TAO conclut que la bonne qualité des mathématiques ne peut pas être simplement mesurée par l'une ou l'autre des qualités énumérées, qu'il qualifie d'ailleurs de *locales*, mais qu'elle dépend aussi de la question plus *globale* de savoir comment ceci va s'intégrer dans les autres facettes des bonnes mathématiques, chacune d'entre elles reposant sur les réussites antérieures ou encourageant le développement de percées futures.

Nous invitons le lecteur à lire en entier l'article original [14], passionnant et plutôt abordable, dont la présente note ne peut donner qu'un aperçu forcément incomplet.

3. Les étapes dans l'apprentissage des mathématiques

Sur son blog *What's new*, T.TAO publie régulièrement des billets (appelés des *posts* en anglais). Ceux-ci traitent des mathématiques sur lesquelles l'auteur travaille (7), mais ils abordent parfois des questions générales sur l'apprentissage des mathématiques : dans ce cas, ces billets sont toujours profonds et d'une lecture (en langue anglaise) aisée dans la mesure où l'auteur se réfère en toute simplicité à ses expérience et ses réflexions personnelles ; il ne fait alors pas appel à des théories utilisant un jargon particulier.

Cette section est consacrée au billet intitulé (8) « Il y a davantage à propos des mathématiques que de la rigueur et des preuves », ainsi qu'à certaines réactions ou questions émanant d'internautes qui sont aussi bien des étudiants que des professeurs et auxquels TAO prend souvent la peine de répondre.

Ce courrier est essentiellement consacré à l'éducation mathématique et s'inscrit, de façon implicite, dans la lignée des travaux de PIAGET pour qui l'intelligence d'un individu se développe par « stades » allant du peu formel vers le plus formel. Il commence, comme tous les autres billets d'ailleurs, par une citation non mathématique placée en encadré ; celle-ci est originale, due à Douglas ADAMS : « l'histoire de toute civilisation majeure de la galaxie a tendance à passer par trois étapes distinctes et reconnaissables, à savoir celles de la Survie, de la Demande de renseignements et de la Sophistication, autrement connues comme les étapes du Comment, du Pourquoi et du Où. Par exemple, la première phase est caractérisée par la question « Comment pouvons-nous manger ? », la deuxième par la question « Pourquoi mangeons-nous ? » et la troisième par la question « Où allons-nous déjeuner ? » » (dans *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*).

Cette pensée s'applique à la majorité des activités humaines où l'on retrouve, schématiquement, les trois étapes rencontrées respectivement par un débutant qui doit trouver sa voie, par une personne plus expérimentée qui s'efforce de comprendre comment elle pourrait mieux se comporter, et enfin par un expert qui cherche à être le plus performant possible. C'est en particulier vrai en ce qui concerne la formation mathématique qui comprend trois étapes qualifiées par T. TAO de, respectivement, « pré-rigoureuse, rigoureuse, post-rigoureuse ». Lors de ces trois phases, l'enseignement y est différent et l'accent principalement porté sur des aspects différents de la discipline.

1. Dans l'étape pré-rigoureuse, les mathématiques sont abordées de manière assez informelle et intuitive, avec de nombreux exemples ; ainsi, le calcul différentiel et intégral est présenté à l'aide de pentes ou de taux de variation et d'aires. Les calculs et les procédures sont souvent privilégiés par rapport à la théorie. Cette époque dure généralement pour les étudiants jusqu'aux premières années du supérieur.
2. En phase rigoureuse, on fait des mathématiques « proprement » ; on a besoin de travailler et de penser avec plus de précision et de manière plus for-

(6) La conjecture de ERDÖS - TURAN, évoquée ci-dessus, fut démontrée en 1975 par le hongrois Endre SZEMERÉDI (né en 1940) et porte désormais son nom : son énoncé affirme en substance que tout sous-ensemble de nombres entiers de densité positive doit nécessairement contenir des progressions arithmétiques de longueur arbitrairement grande. En récompense pour ses travaux, SZEMERÉDI a notamment reçu le prestigieux prix Abel en 2012.

(7) Le niveau est souvent élevé, de sorte que les textes sont difficilement compréhensibles pour des étudiants du secondaire, et même du supérieur ... ainsi que pour leurs professeurs.

(8) Tous les textes originaux sont indiqués entre guillemets, mais ont été traduits en français. Le lecteur intéressé par le sujet est invité à consulter la version originale, qui est quelquefois plus nuancée que sa traduction.

melle ; notamment, le concept de limite n'est plus introduit intuitivement, mais est présenté avec la définition en $\varepsilon-\eta$ due à WEIERTSRASS. On y insiste principalement sur la théorie ; on doit être capable de manipuler aisément des objets mathématiques abstraits, sans attacher trop d'attention à la signification réelle de ces objets. Cela occupe les dernières années de Bachelier et les premières années de Master à l'Université.

3. L'étape post-rigoureuse commence généralement en fin de Master à l'université et n'a pas réellement de fin. Ayant bien assimilé les fondations rigoureuses de la question étudiée, on est désormais apte à revisiter et peaufiner l'intuition pré-rigoureuse, mais cette fois avec l'intuition consolidée par la théorie rigoureuse. On doit être capable de convertir des raisonnements heuristiques, par exemple en utilisant des infinitésimaux avec des arguments rigoureux. L'accent est alors principalement porté sur les applications et les problèmes inédits à résoudre.

Un tableau récapitulatif résume ce qui précède :

Étape	Maths enseignées de manière	Accent mis sur	Quand ?
Pré-rigoureuse	informelle, intuitive	les calculs	transition secondaire-université
Rigoureuse	formelle	la théorie	début de l'université
Post-rigoureuse	rigoureuse et intuitive	les applications	fin de l'université et après

Comme il est signalé sur le blog « M-Phi » (abréviation de *Mathematical Philosophy*), les idées de T. TAO peuvent être mises en parallèle avec des travaux de philosophes (tels HEGEL) et de pédagogues (comme SFARD, TALL) qui faisaient appel à trois étapes dans les théories qu'ils exposaient.

En effet, la présentation du mathématicien fait penser à la dialectique hégélienne : celle-ci se développe par « triade », à savoir trois stades appelés respectivement *thèse*, *antithèse* et *dépassement* (ou synthèse), et est un « mode de raisonnement qui consiste à analyser la réalité en mettant en évidence les contradictions de celle-ci et à chercher à les dépasser » (*Le Petit Larousse illustré*, 1989, p. 322). Chacune des trois étapes de T. TAO représente une sorte de synthèse de l'étape précédente. L'étape pré-rigoureuse doit permettre à l'apprenant de se familiariser avec l'outil mathématique étudié et de se l'approprier ; à cet effet, il convient de faire appel à de l'intuition et à du « concret », pour que les calculs effectués aient du sens. L'étape rigoureuse doit s'appuyer sur une certaine aisance dans la manipulation de procédures et veut asseoir la matière grâce à une théorie indiscutable ; la rigueur a pour objectif « non pas de détruire toute l'intuition, mais bien de détruire la mauvaise intuition tout en clarifiant et favorisant la bonne intuition ». Ainsi, comme le fait remarquer Catarina DUTHIL NOVAES, le formalisme et la rigueur sont indispensables en mathématiques, car ils jouent le rôle d'un d'« échafaudage cognitif : [c'est un] dispositif externe qui améliore la connaissance cognitive du sujet, en lui offrant en particulier un moyen de corriger d'éventuelles erreurs » ([6]) ; en d'autres termes, toujours selon la même auteure, l'intuition fait office de *proposant* qui a un aspect créatif, tandis que la rigueur est un *opposant* ayant un côté correctif pour rendre sûres les propositions trouvées par intuition. Il faut donc pouvoir combiner un formalisme rigoureux et une bonne intuition pour être capable d'aborder avec fruit la troisième étape post-rigoureuse ; alors, les objets mathématiques sont devenus des *procepts* ([11]), en ce sens qu'ils peuvent être utilisés comme procédures ou comme concepts et sont dès lors susceptibles de jouer un double rôle d'*outil* et d'*objet* ; ceci permet alors de résoudre des problèmes complexes et de découvrir de nouveaux résultats.

La théorie des trois étapes de la formation mathématique rejoint également un peu celle des trois *mondes mathématiques* de D. TALL ; ceux-ci seront notés dans la suite de M_1 à M_3 et appelés comme suit, conformément à la terminologie utilisée dans la référence [12] (ou sur le site de cet auteur)

M_1 : le concrétisé (conceptuel)
M_2 : le symbolique (proceptuel)
M_3 : le formel (axiomatique)

De fait, tout se passe, grosso modo et de manière imagée, comme si les habitants de chacun de ces trois pays se trouvaient dans une des trois étapes envisagées par T. TAO. Plus précisément, on peut penser que le monde M_1 est peuplé principalement par des élèves se trouvant à l'étape pré-rigoureuse, M_2 est essentiellement composé d'étudiants en phase rigoureuse, tandis que pour vivre de façon épanouie et effectivement fructueuse dans M_3, il faut probablement se situer à l'étape post-rigoureuse.

Cette vision de T. Tao sur l'évolution dans la formation mathématique est évidemment holistique ([9]) et est construite *a posteriori*, avec beaucoup de « hauteur ». Quand on examine la situation de manière moins *macroscopique* , c'est-à-dire plus individuelle, il apparaît vite que deux personnes n'apprennent pas de la même manière : chaque individu doit s'approprier un certain nombre (d'ailleurs variable) de concepts. Or, l'acquisition de chacun de ceux-ci se réalise selon « un parcours du procédural au structural », en passant successivement par les trois stades dans la formation de tout concept mathématique, à savoir les phases respectivement d'*intériorisation*, de *condensation* et de *réification* ([3], [10]). Cette progression en trois stades est à recommencer à chaque fois qu'est rencontré un nouveau concept. En conséquence, quelqu'un(e) peut se trouver à des stades distincts pour deux concepts différents ; c'est, par exemple, le cas lorsqu'une personne maîtrise parfaitement certains concepts et se trouve alors au stade de réification pour ceux-ci, et rencontre de nouveaux concepts, auquel cas elle en est donc pour ces derniers au stade d'intériorisation. Bien entendu, plus la personne possède de l'expérience, plus elle maîtrise un grand nombre de concepts et, le plus souvent, plus chaque étape de réification est atteinte aisément et rapidement ; mais il convient à chaque fois d'accomplir le parcours complet. Ainsi, selon une pertinente formule due à Guy Noël qui m'a fortement aidé pour ce paragraphe, on peut considérer l'explication de T. Tao comme étant un schéma global valable mais ne dispensant pas de multiples petits schémas locaux.

Il est clair que T. Tao, en s'appuyant sur son expérience personnelle, envisage principalement l'éducation de mathématiciens de haut niveau. Mais, dans les commentaires qui ont suivi le billet, il envisage également le cas de non mathématiciens. Il constate en effet que certains de ses collègues physiciens ou ingénieurs partent de l'étape pré-rigoureuse et arrivent au niveau de la post-rigoureuse, mais ne transitent pas par la phase rigoureuse ; cette dernière est remplacée par l'étape qu'il qualifie d'*heuristique* : par exemple, au stade heuristique, on est apte à exploiter des infinitésimaux efficacement et avec précision, mais on n'est pas capable de les transformer au sein d'un raisonnement rigoureux. Quant à la question de savoir si ces deux parcours, à savoir « pré-rigoureux → rigoureux → post-rigoureux » ou « pré-rigoureux → heuristique → post-rigoureux », donnent finalement des résultats équivalents, le mathématicien répond implicitement par cette comparaison : « les personnes qui apprennent (par exemple) l'anglais comme langue natale et le français comme second langage sont d'habitude reconnaissables de ceux qui apprennent ces deux langues dans l'ordre inverse, même si elles ont acquis de l'aisance dans les deux langues. »

Bien entendu, il n'est pas donné à tout le monde d'atteindre un niveau de post-rigueur comparable à celui de T. Tao . . . et c'est évidemment un euphémisme. Mais on peut penser que la formation mathématique de toute personne suit schématiquement une évolution semblable à celle décrite ci-dessus, en s'arrêtant éventuellement à l'une des deux premières étapes.

4. Quelques conseils pratiques

Le sous-titre du blog *What's new* est le suivant : « mises à jour des papiers de recherche et d'exposés, discussions de problèmes ouverts, et autres sujets relatifs aux maths. » Chaque billet, précédé d'une citation pertinente, est assez court et toujours en langage simple, suivi de commentaires, réactions et questions posées par des internautes qui sont assez souvent des étudiants du supérieur ; de multiples liens permettent de passer d'un billet à un autre.

Les textes au contenu mathématique sont évidemment des plus intéressants mais ne sont pas toujours accessibles pour le « commun des mortels ». Par contre, la série « *Career advice* » est, d'après l'auteur lui-même, « une collection de pièces variées de conseils sur la carrière académique en maths, grossièrement ordonnée par la période de la carrière durant laquelle le conseil est le plus pertinent (même si, évidemment, certains des conseils sont pertinents à de multiples périodes). » L'auteur y envisage tous niveaux, allant de l'école primaire au post-doctorat ; il vise particulièrement les futurs mathématiciens, mais certains de ses avis pourraient (et même devraient) intéresser tout public. Par exemple, des titres tels que « Travaillez dur », « Aimez votre travail », « Soyez flexible », « Soyez

([9]) Le mot *holisme* désigne ici « un système d'explication globale » (d'après une définition donnée dans le dictionnaire *Le Petit Robert*, 1996, p. 1095).

sceptique à propos de votre propre travail », « Soyez patient » ... intéressent tout le monde : émanant d'un scientifique aussi exceptionnel, de tels conseils simples et judicieux ne devraient pas laisser indifférent ! Nous recommandons aux professeurs de mathématiques de lire les billets qui les concernent le plus et d'inviter leurs élèves à en faire de même.

Nous allons nous contenter dans la suite de rassembler, parmi tous les conseils pertinents donnés sur le blog, certaines idées concrètes qui, au vu de notre expérience professionnelle, nous paraissent des plus intéressantes dans l'éducation des mathématiques ; en effet, on peut y trouver des éléments de réponse à trois questions pratiques (évidemment reliées entre elles, d'ailleurs) que nous avons souvent rencontrées au cours de notre carrière et qui nous semblent primordiales pour la plupart des étudiants que nous avons côtoyés (au niveau de la transition entre le secondaire et l'université).

– Un élève se demande parfois comment il peut être certain d'avoir compris une matière. On pourrait disserter longtemps sur ce sujet et y apporter des arguments détaillés, voire sophistiqués. T. Tao fournit une réponse toute simple à cette question récurrente : « être capable d'expliquer quelque chose est la preuve ultime que vous avez compris. Vous devriez constamment expliquer ce que vous cherchez à comprendre, à vos amis ou à vous-même, pour contrôler si vous avez des questions. »
– Un professeur de mathématiques est souvent amené à encourager ses élèves à « travailler activement » ses mathématiques ; qu'est-ce que cela signifie concrètement ? Bien sûr, cette question mériterait de longs développements, mais notre mathématicien nous propose une recette incontournable dont l'application ne semble pas (trop) difficile : « posez-vous des questions idiotes - et répondez-y. » A différents endroits, l'auteur donne des exemples concrets de ce qu'il conviendrait de se demander. Ainsi, il cite Paul Halmos : « ne vous contentez pas de le [un texte mathématique] lire ; combattez avec lui ! Posez vos propres questions, regardez vos propres exemples, découvrez vos propres preuves. Est-ce que l'hypothèse est nécessaire ? Est-ce que la réciproque est vraie ? Que se passe-t-il dans le cas spécial classique ? Et qu'en est-il avec les cas dégénérés ? Où la preuve fait-elle appel aux hypothèses ? » (dans *I want to be a mathematician*). Un autre exemple est donné par ces questions à se poser lorsqu'on est amené à prouver un lemme (mais ce qui suit pourrait être adapté dans d'autres cas) : « Si le lemme est prouvé, comment peut-il être utilisé ? Quelles caractéristiques du lemme sont les plus importantes selon vous ? Est-ce qu'un lemme plus faible suffit ? Existe-t-il une formulation plus simple du lemme ? Est-ce que cela vaut quelque chose d'omettre une hypothèse du lemme, si cette hypothèse semble difficile à obtenir en pratique ? ». De telles questions nécessitent un fréquent retour en arrière pour découvrir de nouveaux aspects et de nouvelles applications de la matière vue antérieurement : « apprenez et re-apprenez votre champ » ; par ailleurs, il importe également d'anticiper la matière pour savoir vers où on va, d'où ce nouveau conseil : « pensez devant ». Ainsi, un apprentissage des mathématiques n'est pas uniquement séquentiel, comme on le pense parfois.
D'autres conseils du blog concernent le lien inévitable entre les mathématiques et l'écrit. Bien entendu, l'oral n'est pas à négliger et doit même être privilégié en certaines circonstances, mais les étudiants doivent se rendre compte que, pour faire réellement des mathématiques, il faut beaucoup écrire pour rendre son travail « disponible ». Selon T. Tao, « mettez par écrit tout ce que vous avez fait » ; cette recommandation rejoint l'idée d'accorder une place non négligeable aux *narrations de recherche* (voir à ce sujet [1], par exemple). L'auteur ajoute ceci, qui pourrait surprendre des débutants mais pas des mathématiciens professionnels : « utilisez la corbeille à papier ».
Une recommandation méthodologique supplémentaire consiste à ne pas se contenter d'apprendre ce que le professeur a enseigné. Il convient de prendre connaissance d'autres présentations ou points de vue, donc de faire appel à des sources multiples et variées. En particulier, « apprenez la puissance des outils utilisés par d'autres mathématiciens », car, comme le souligne cette savoureuse métaphore d'Abraham Maslow : « je suppose qu'il est tentant, si vous n'avez qu'un marteau, de traiter toute chose comme si c'était un clou » (dans *Psychology of Science*).
– Comment résoudre un problème ? Il s'agit assurément d'une question essentielle en mathématiques. En effet, la résolution de problèmes consti-

tue, d'un point de vue collectif, le « moteur » qui fait sans cesse progresser la discipline elle-même et par ricochet, toutes les autres sciences ; d'un point de vue individuel, elle aide un étudiant à mieux assimiler la matière (car un concept mathématique n'est pas réellement assimilé par quelqu'un tant que celui-ci n'est pas capable de l'appliquer pour résoudre un problème inédit) et peut lui donner de lui-même une image valorisante qui le mettra dans d'excellentes dispositions mentales pour souhaiter approfondir les mathématiques et, plus généralement, apprendre toute autre matière.

Mais il n'est pas facile de répondre à la question posée, puisque, par définition, un problème constitue un défi nouveau pour celui qui le rencontre. S'il n'existe donc aucune « recette » toute faite et universelle, on peut toufefois donner des règles *heuristiques* générales dictant des stratégies à suivre pour performer dans la résolution de problèmes mathématiques. Une référence incontournable sur cette question est le livre [8].

Dans la même veine, T. Tao a rédigé un excellent livre intitulé « Résolution de problèmes mathématiques : un point de vue personnel » [15]. Le premier chapitre est consacré précisément aux stratégies à envisager face à un problème inédit. Ces dernières, qui s'inspirent explicitement de celles données par Polya, sont présentées, puis illustrées concrètement sur le problème (très abordable) P que voici : « un triangle a ses longueurs en progression arithmétique, avec différence ([10]) d. L'aire du triangle est t. Trouvez les longueurs et les angles du triangle ». Pour résoudre ce problème P, l'auteur donne les conseils suivants : « comprenez le problème ; comprenez les données ; comprenez l'objectif ; sélectionnez de bonnes notations ; mettez par écrit ce que vous connaissez avec la notation sélectionnée, dessinez un diagramme ; modifiez légèrement le problème ; modifiez significativement le problème ; prouvez des résultats au sujet de votre question ; simplifiez, exploitez les données, et atteignez les buts tactiques ». Tous ces points sont donc appliqués, successivement et méticuleusement, au cas particulier P. Il est extrêment instructif de découvrir la multitudes de pistes envisagées par l'auteur, puis de voir comment celles-ci sont soit exploitées et approfondies, soit rejetées. Dans les chapitres suivants, T. Tao traite, selon la même méthodologie, des exemples émanant successivement de la théorie des nombres, l'algèbre et l'analyse, la géométrie euclidienne, la géométrie analytique, ainsi que des problèmes divers. Ces énoncés sont, pour la plupart, des questions à des concours tels que les Olympiades mathématiques.

Ce livre remarquable n'est pas le seul sur ce sujet (outre le livre déjà mentionné de Polya, signalons les ouvrages belges [2] et [3]). Mais, par la fécondité et la clarté de son contenu, nous tenons à le recommander aux élèves du niveau proche de la transition entre le secondaire et le supérieur (ceux en tout cas qui sont intéressés à progresser en mathématiques), ainsi qu'à leurs professeurs.

Un dernier point, peut-être anecdotique, sur cet ouvrage : le manuscrit de la première édition a été rédigé lorsque l'auteur était âgé de 15 ans et n'avait pas encore commencé sa carrière proprement dite de mathématicien ... mais avait déjà été trois fois médaillé aux Olympiades internationales ! Dans la deuxième édition, écrite 15 ans plus tard, l'auteur signale qu'évidemment le bagage acquis à la fin de ses études et lors des premières années de sa carrière académique lui permettrait de résoudre les problèmes d'une autre manière que celle du livre ... ce qui n'enlève rien à la qualité du texte proposé par un jeune (certes extrêmement doué) qui rencontre pour la première fois les problèmes traités. De ce fait, ce livre est accessible et représente un modèle dont on peut s'inspirer. De tels documents sont des plus intéressants, car nous pensons, à l'instar de Polya, que « résoudre des problèmes est une question d'habilté pratique, comme de nager, par exemple. Or, l'habileté pratique s'acquiert par l'imitation et l'usage. Lorsqu'on essaie de nager, on imite les mouvements des pieds et des mains de ceux qui réussissent à tenir la tête hors de l'eau et finalement on apprend à nager en pratiquant la natation. Lorsqu'on résoud des problèmes, il faut observer et imiter ce que font les autres en pareil cas, et finalement on apprend à faire des problèmes en en faisant » ([8], p. 10). T. Tao prolonge et explicite cette pensée en constatant que « c'est en expérimentant qu'on accède à la compréhension profonde des situations et qu'on finit par avoir une bonne idée de ce qui est important ou accessoire » (cité dans [5], p. 154).

([10]) Par différence, on entend bien entendu la raison de la progression.

Comme on a pu l'observer, les conseils donnés par T. Tao sont simples, concrets, faciles à mettre en application. Ils sont surtout « multifacettes » puisqu'ils portent aussi bien sur des connaissances en mathématiques, mais aussi des métaconnaissances ([11]), des méthodes de travail ou encore diverses qualités psychologiques. Ces pensées sont évidemment conformes à ce que l'auteur appelle des « bonnes mathématiques ». Cette variété des points de vue, omniprésente dans les écrits de T. Tao, explique probablement la difficulté que représentent (pour certains) les mathématiques , mais aussi la richesse, l'intérêt et la beauté de celles-ci. C'est aussi ce qui a probablement poussé T. Tao à écrire, au début de la préface à la première édition de son livre sur les problèmes [15], cet avis qui semble bien caractéristique de l'auteur et constituera dès lors la conclusion de cet article :

> « J'aime vraiment les mathématiques parce que c'est amusant. »

Remerciements. J'avais envoyé à Terence Tao la version initiale de cette note en lui demandant l'autorisation de publier ce travail. Une réponse personnelle et affirmative m'a été envoyée quelques heures seulement après mon envoi ; l'auteur m'écrivait notamment : « en tout cas, il semble que vous donniez votre propre perspective sur ces sujets plutôt que simplement traduire mes propres mots. » Je le remercie vivement pour sa disponibilité, sa courtoisie et sa magnanimité. Cet épisode met en évidence le fait que ce mathématicien de haut vol s'intéresse vraiment à l'enseignement des mathématiques et, en particulier, n'est apparemment pas indifférent à la revue *Losanges* de la SBPMef (dont il avait reçu les coordonnées électroniques). Selon moi, ceci justifie (à tout le moins partiellement) toutes les louanges qu'on peut lui adresser et qui sont bien traduites par cette citation due à John Gardnett, professeur à l'Université de Californie : « Terry est comme Mozart. Les mathématiques débordent et coulent de lui sans effort. La différence avec Mozart est qu'il n'a aucun problème de personnalité : tout le monde l'aime bien. Il n'y a qu'un mathématicien par génération possédant un tel talent. Le sien est inouï. » (cité dans [5], p. 151).

J'adresse également toute ma reconnaissance à Guy Noël qui a bien voulu relire et commenter la première mouture de cet article. Il m'a permis d'améliorer substantiellement le passage sur les liens entre les théories de Tao, de Tall et de Sfard.

Pour en savoir plus

[1] Bair J. - Delagardelle J.C. - Henry V., *Narrations de recherche - De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur*. Document de la Commission pédagogique de la SBPMef, 2006.

[2] Bair J. - Haesbroeck G. - Haesbroeck J.J., *Formation mathématique par la résolution de problèmes*, De Boeck Université, Bruxelles, 2000.

[3] Cazzaro J.P. - Noël G. - Pourbaix F. - Tilleuil P., *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes*, De Boeck, Bruxelles 2001.

[4] Clements M.A., Terence Tao, *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1984, pp. 213 - 238.

[5] Delahaye, J.P., L'éducation réussie d'un surdoué, dans *La logique, un aiguillon pour la pensée*, Belin Pour la Science, 2012, pp. 150 - 157.

[6] Duthil Novaes C., *Formal Languages in Logic*, Cambridge University Press, 2012.

[7] Flavell J.H., Développement métacognitif, dans *Psychologie développementale, problèmes et réalités*, par Bideault J. et Richelle M., éditions Mardaga, Bruxelles, 1985.

[8] Polya G., *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, Paris, 1965.

[9] Robert A. - Robinet J., Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16, n° 2, 1996, pp. 145 - 176.

[10] Sfard A., On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and

([11]) Comme le préfixe *méta* signifie « d'un niveau supérieur », le mot *métaconnaissance* englobe tout ce que le sujet connaît à propos de ses connaissances et de sa connaissance. Le concept de *métacognition*, dans le sens qui nous occupe ici, est apparu aux USA au début des années 1970. D'après Flavell, un des pionniers en la matière, il importe à la fois de dégager des connaissances métacognitives (c'est-à-dire « des connaissances sur la manière dont l'étudiant construit ses connaissances ») et de se pencher sur la régulation de ces métaconnaissances (en d'autres termes, sur « l'orchestration des processus d'apprentissage en fonction des objectifs et des données sur lesquels ils portent) » [7]. Le lecteur intéressé par « la prise en compte du méta en didactique des mathématiques » peut consulter [9].

objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1991, pp. 1 - 36.

[11] Tall D., The Transition to Formal Thinking in Mathematics, *Mathematics Education Research Journal*, 20 (2), 2008, pp. 5-24

[12] Tall D., *How Humans Learns to Think Mathematically : Exploring the Three Worlds of Mathematics*, Cambridge University Press, 2013.

[13] Tao T., Perfect numbers, *Trigon* (School Mathematics Journal of the Mathematical Association of South Australia), 21 (3), 1983, p. 7.

[14] Tao T., What is good mathematics ? , *Bulletin of the American Mathematical Society*, Volume 44, n° 4, 2007, pp. 623 - 634 ; accessible à l'adresse électronique : arxiv.org/pdf/math/0702396.

[15] Tao T., *Solving Mathematical Problems : A Personal Perspective*, Oxford University Press, 2006, ISBN 9780199205608.

Quelques sites et blogs sur le sujet

- http ://terrytao.wordpress.com/. Le blog de T. Tao.
- http ://www.math.ucla.edu/~tao/. Le site de T. Tao à l'UCLA.
- http ://fr.wikipedia.org/wiki/Terence_Tao. Le site wikipédia sur T. Tao.
- http ://m-phi.blogspot.be/. Un blog dédié à la philosophie mathématique.
- http ://www.meirieu.com/. Site de Philippe Meirieu intitulé *Histoire et actualité de la pédagogie.*
- http ://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/. Le site personnel de D. Tall qui peut conduire à une documentation riche sur l'enseignement des mathématiques.

Jacques Bair est professeur émérite de l'Université de Liège, ✉ j.bair@ulg.ac.be