

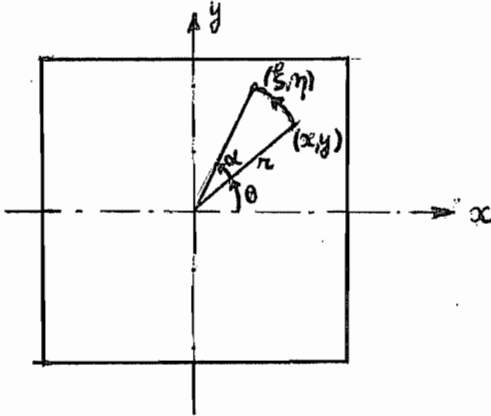
EXERCICES DE THEORIE DES STRUCTURES

Par J.F. DEBONGNIE, Assistant

Année Académique 1976-1977

## I. PROBLEMES DE CINEMATIQUE

1. Donner l'expression du champ de déplacements représentant la rotation autour de l'axe Oz du plan x Oy. Vérifier que les mesures de déformation de GREEN et JAUMANN sont nulles pour un tel champ. Montrer que ce n'est pas le cas pour le champ de rotations linéarisé  $u = -\alpha y, v = \alpha x$ .



- a) On peut mettre les coordonnées d'un point sous la forme:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta .$$

Après rotation, l'angle  $\theta$  est devenu  $(\theta + \alpha)$ . On a donc

$$\xi = r \cos (\theta + \alpha) = r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$\eta = r \sin (\theta + \alpha) = r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha .$$

Les déplacements sont donc donnés par

$$u = \xi - x = x(\cos \alpha - 1) - y \sin \alpha$$

$$v = \eta - y = x \sin \alpha + y (\cos \alpha - 1)$$

- b) La matrice jacobienne s'écrit

$$J = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Elle est orthonormale, ce qui entraîne

$$2G = J^T J - I = 0.$$

Il en est évidemment de même de la mesure de JAUMANN, car on peut écrire, du fait que J est orthonormale,

$$J = U(I+H) \quad , \quad \text{avec } U=J, \quad H=0$$

c) Linéarisons les déplacements ci-dessus :

$$\cos\alpha - 1 = 0(\alpha^2) \quad \sin\alpha \approx \alpha$$

$$\Rightarrow \quad u = -y\alpha \quad , \quad v = x\alpha$$

On a alors

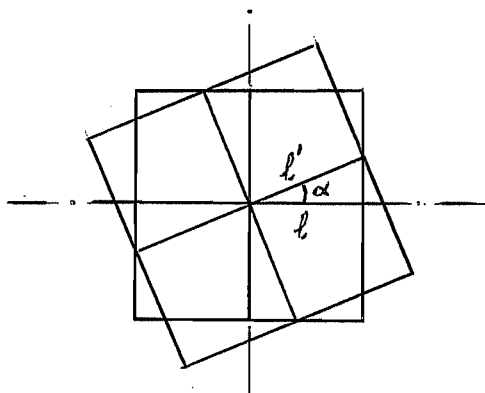
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad ;$$

ce qui entraîne l'expression suivante du tenseur de GREEN

$$g_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$g_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$2g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha + \alpha = 0$$



La figure ci-contre montre en effet que les fibres s'allongent lors de la "rotation". La mesure de JAUMANN aura la forme

$$H = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}$$

où  $h$  est donné par la relation

$$h^2 + 2h = 2g$$

soit

$$h = -1 \pm \sqrt{1-2g} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}$$

où il faut choisir le signe positif pour que  $h=0$  lorsque  $\alpha=0$ .

d) Montrons enfin que la mesure linéarisée de déformation ne s'annule pas pour une rotation finie

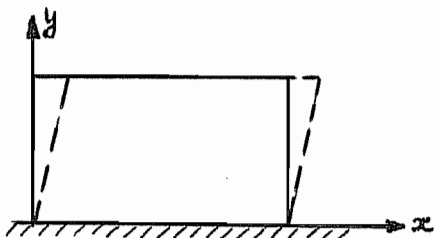
$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \cos\alpha - 1 \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \cos\alpha - 1 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin\alpha + \sin\alpha \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{seul le cisaillement s'annule.} \\ \text{Les déformations } \epsilon_{xx}, \epsilon_{yy} \text{ ne s'annulent} \\ \text{qu'au premier ordre.} \end{array}$$

2.a) Donner la mesure de déformation de GREEN pour le champ de déplacements  $u = \alpha y, v = 0$

On a 
$$g_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0$$

$$2g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha$$

$$g_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{2}$$



On remarque que, contrairement au cas linéaire, il existe une déformation  $g_{yy}$ .

b) Quel champ  $v$  faut-il ajouter pour obtenir un tenseur de GREEN réduit au cisaillement pur?

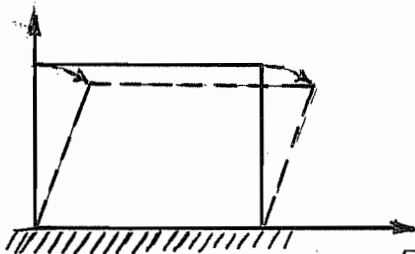
Il faut que les relations suivantes soient vérifiées :

$$g_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$2g_{xy} = \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha$$

$$g_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\alpha^2}{2} = 0,$$

$$\text{soit } \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}$$



$$u = \alpha y, \quad v = (\sqrt{1-\alpha^2} - 1) y$$

Seul le signe (+) convient, si l'on veut que  $v=0$  pour  $\alpha=0$ .

Il vient donc

Posant  $\alpha = \sin \phi$ , on observe que  $v = (\cos \phi - 1)y$ : le point 1 décrit un arc de cercle. Pour  $\alpha=1$ ,  $\phi=90^\circ$ , et le corps est aplati.

c) La mesure de JAUMANN se réduit-elle aussi à du cisaillement pur?

Supposons que ce soit le cas : on aurait

$$2 \begin{bmatrix} 0 & h_{12} \\ h_{12} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & h_{12} \\ h_{12} & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} \end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{aligned} 2g_{11} &= h_{12}^2 \\ 2g_{12} &= 2h_{12}^2 \\ 2g_{22} &= h_{12}^2 \end{aligned}$$

Le cisaillement pur au sens de la mesure de JAUMANN et le cisaillement pur au sens de la mesure de GREEN sont donc deux notions différentes. Cherchons un champ de cisaillement pur au sens de JAUMANN, de la forme

$$u = \alpha y, \quad v = \beta x$$

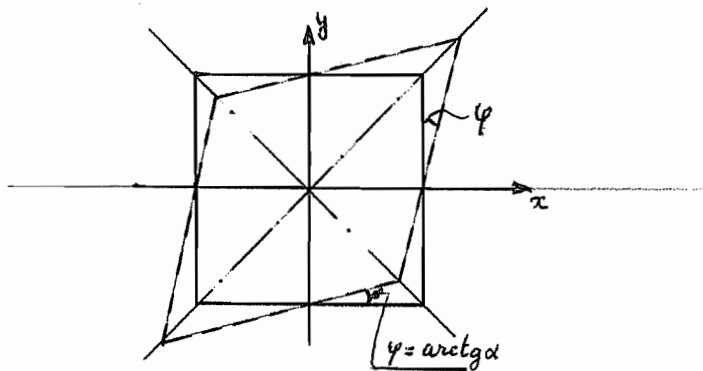
Il vient

$$g_{11} = \frac{\beta^2}{2}$$

$$2g_{12} = \alpha + \beta$$

$$g_{22} = \frac{\alpha^2}{2}$$

La solution correspond au cas  $\beta = \alpha$ .



### 3. Non-commutativité des rotations finies

Considérons une rotation selon l'axe  $x$  : il y correspond la matrice de rotation

$$U_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Soit alors une rotation selon l'axe y : il y correspond la matrice

$$U_y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne correspondant à la succession des opérations (Rot y, Rot x) sera donc

$$J_1 V = U_y U_x I = U_y U_x,$$

soit

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\beta\cos\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix};$$

si les rotations sont effectuées dans l'ordre inverse (Rot x, Rot y), on aura

$$J_2 = U_x U_y,$$

soit

$$J_2 = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \sin\beta\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

On constate que  $J_1 \neq J_2$ , (ce qui ne fait d'ailleurs que traduire la non-commutativité du produit matriciel), c'est-à-dire que deux rotations autour d'axes orthogonaux ne peuvent être effectuées dans l'ordre inverse.

Dans le cadre de la linéarisation géométrique, on néglige tout terme du second ordre en les angles de rotations. Par conséquent

$$\cos\alpha \approx 1, \quad \cos\beta \approx 1, \quad \sin\alpha \approx \alpha, \quad \sin\beta \approx \beta,$$

et

$$\hat{U}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{U}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices de rotations prennent donc la forme

$$U = I + R$$

avec la condition

$$U^T U = (I+R^T)(I+R) = I \Rightarrow R+R^T+R^T R=0,$$

qui se linéarise en

$$R+R^T=0 \quad (\text{antisymétrique})$$

La commutativité a lieu si l'on convient de négliger tout terme du second ordre apparaissant dans les calculs :

$$U_1 U_2 = (I+R_1)(I+R_2) = I + R_1 + R_2 + \underbrace{R_1 R_2}_{\text{négl.}}$$

$$U_2 U_1 = (I+R_2)(I+R_1) = I + R_2 + R_1 + \underbrace{R_2 R_1}_{\text{négl.}}$$

Ainsi dans notre cas ,

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ \alpha\beta & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$



et

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha\beta & \beta \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

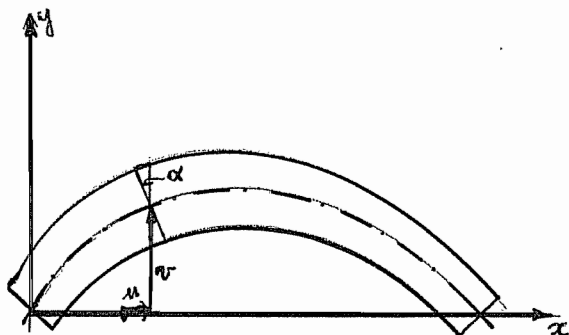
#### 4. Champ de déplacements dans une poutre

Le champ de déplacements se décompose en

- Translation :  $(u, v)$
- rotation :  $(-y \sin \alpha, y(\cos \alpha - 1))$

Au total, on a donc

$$\begin{aligned} u_1 &= u - y \sin \alpha \\ u_2 &= v + y(\cos \alpha - 1) \end{aligned}$$



Les déformations de Green s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 = u' - y \cos \alpha \alpha' + \frac{1}{2} (u' - y \cos \alpha \alpha')^2 + \frac{1}{2} (u' - y \sin \alpha \alpha')^2 \\ &= u' + \frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} v'^2 - y(\cos \alpha (1 + u') + v' \sin \alpha) \alpha' + \frac{1}{2} y^2 \alpha'^2 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 = (\cos \alpha - 1) + \frac{1}{2} (\cos \alpha - 1)^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha =$$

$$\cos \alpha - 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \cos \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} 2g_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\sin \alpha + v' - y \sin \alpha \alpha' \\ &\quad - (u' - y \cos \alpha \alpha') \sin \alpha + (v' - y \sin \alpha \alpha') (\cos \alpha - 1) \\ &= -\sin \alpha (1 + u') + v' \cos \alpha \end{aligned}$$

Cherchons la condition d'absence de cisaillement : il faut que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v'}{1+u'}$$

Dans ce cas, on a

$$v' \sin \alpha = (1+u') \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}, \text{ d'où}$$

$$(1+u') \cos \alpha + v' \sin \alpha = \frac{(1+u')}{\cos \alpha}$$

$$\text{Or } \frac{\alpha'}{\cos \alpha} = \cos \alpha \frac{\alpha'}{\cos^2 \alpha} = \cos \alpha \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} \alpha)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} \alpha)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{(1+u')^2}}} \frac{v''(1+u') - u''v'}{(1+u')^2}$$

$$= \frac{v''(1+u') - u''v'}{((1+u')^2 + v'^2)^{1/2} (1+u')}$$

Enfin,

$$\alpha' = \cos \alpha \left( \frac{\alpha'}{\cos \alpha} \right) = \frac{v''(1+u') - u''v'}{((1+u')^2 + v'^2)}$$

ce qui mène finalement à l'expression

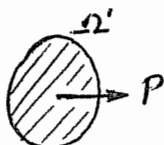
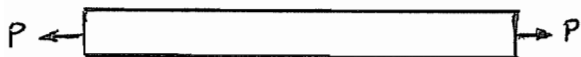
$$g_{11} = u' + \frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} v'^2 - y \frac{v''(1+u') - u''v'}{((1+u')^2 + v'^2)^{1/2}} + y^2 \frac{(v''(1+u') - u''v')^2}{((1+u')^2 + v'^2)^2}$$

Dans le cas où l'on impose  $u \equiv 0$ , il vient

$$g_{11} = \frac{1}{2} v'^2 - y \frac{v''}{(1+v'^2)^{1/2}} + \frac{1}{2} g^2 \frac{v''^2}{(1+v'^2)^{1/2}}$$

## II. DIFFERENTES TENSIONS

1. Soit une barre tendue. On suppose que la section  $\Omega$  devient  $\Omega'$ ,  
et que la barre prend l'allongement  $e = \frac{u}{l}$



a) Tensions eulériennes

-----

$$P_1 = v_1 \sigma_{11} \Omega'$$

$$\sigma_{11} = \frac{P_1}{\Omega'}$$

b) Tensions de Piola

$$P_1 = n_1 t_{11} \Omega$$

$$t_{11} = \frac{P_1}{\Omega}$$

c) Tensions de K.T.

$$\vec{P} = \pi_1 \vec{g}_1$$

$$\vec{g}_1 = (1+e)\vec{e}_1$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{P_1}{1+e}$$

$$\pi_1 = n_1 s_{11}$$

$$s_{11} = \frac{P_1}{\Omega(1+e)}$$

Montrons que le travail virtuel reste le même :

$$P. : \delta \mathcal{E} = t_{11} \ell \Omega D_1 \delta u_1 = t_{11} \Omega \ell \delta e = P_1 \ell \delta e = P_1 \delta u$$

$$K.T. : \delta \mathcal{E} = s_{11} \Omega \ell \delta g_{11} = \frac{P_1}{(1+e)} \ell (\delta e + e \delta e) = P_1 \ell \delta e = P_1 \delta u$$

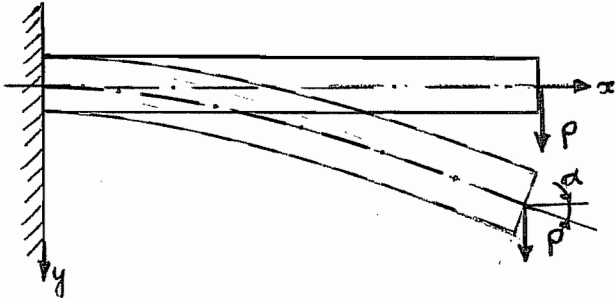
$$E : \delta \mathcal{E} = \sigma_{11} \Omega' \ell' \partial_1 \delta u_1$$

$$\text{Or } \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial}{\partial x}$$

Donc

$$\delta \mathcal{E} = P_1 \ell (1+e) \frac{1}{1+e} \frac{\delta u}{\ell} = P_1 \delta u$$

2. L'extrémité d'une poutre est soumise à une charge morte P



uniformément répartie. Sous l'effet de cette charge, elle tourne d'un angle  $\alpha$ . Donner les équations régissant les différentes tensions à l'extrémité si la section  $\Omega$  reste inchangée, et si la fibre de la poutre ne s'est pas allongée.

a) Piola :  $P = P \vec{e}_2$

$$\vec{n} = \vec{e}_1$$

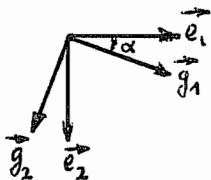
$$0 = (n_1 t_{11} + n_2 t_{21}) \Omega$$

$$= t_{11} \Omega$$

$$P = (n_1 t_{12} + n_2 t_{22}) \Omega$$

$$= t_{12} \Omega$$

b) Kirchhoff - Trefftz



$$\vec{e}_1 = \vec{g}_1 \cos \alpha - \vec{g}_2 \sin \alpha$$

$$\vec{e}_2 = \vec{g}_1 \sin \alpha + \vec{g}_2 \cos \alpha$$

$$P = P \sin \alpha \vec{g}_1 + P \cos \alpha \vec{g}_2$$

$$+ P \sin \alpha = \Omega (n_1 s_{11} + n_2 s_{12}) = s_{11} \Omega$$

$$s_{11} = + \frac{P \sin \alpha}{\Omega}$$

$$P \cos \alpha = \Omega (n_1 s_{21} + n_2 s_{22}) = s_{21} \Omega$$

$$s_{21} = \frac{P \cos \alpha}{\Omega}$$

c) Eulériennes

$$\vec{v} = \cos\alpha \vec{e}_1 + \sin\alpha \vec{e}_2$$

$$P = (v_1 \sigma_{21} + v_2 \sigma_{22}) \Omega \quad \Rightarrow \quad \sigma_{21} \cos\alpha + \sigma_{22} \sin\alpha = \frac{P}{\Omega}$$

$$0 = v_1 \sigma_{11} + v_2 \sigma_{12} \quad \sigma_{11} \cos\alpha + \sigma_{12} \sin\alpha = 0$$

3. a) Déterminer les tensions de PIOLA, les tensions eulériennes et les tensions de KIRCHHOFF-TREFFTZ dans un bloc étiré et écrasé d'épaisseur invariante h.

b) Vérifier que la variation de l'énergie de déformation est identique dans les trois descriptions, pour

$$\delta u_1 = \left(\frac{a'}{a} - 1\right)x, \quad \delta u_2 = \left(\frac{b'}{b} - 1\right)y$$

a) Expression des tensions

$$\cdot \text{PIOLA } t_{11} = \frac{P}{bh} \quad t_{22} = -\frac{Q}{Qh}$$

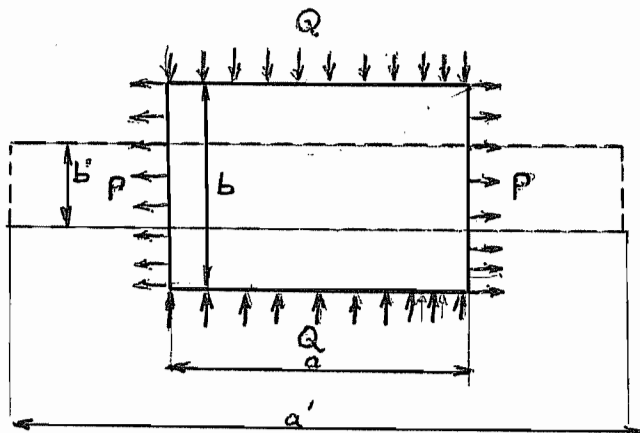
$$\cdot \text{K.T. } \vec{g}_1 = \frac{a'}{a} \vec{e}_1 ; \quad \vec{g}_2 = \frac{b'}{b} \vec{e}_2$$

$$\vec{P} = P \frac{a}{a'} \vec{g}_1 \quad \vec{Q} = Q \frac{b}{b'} \vec{g}_2$$

$$s_{11} = \frac{1}{bh} P \frac{a}{a'} \quad s_{22} = -\frac{1}{ah} Q \frac{b}{b'}$$

• EULERIENNES

$$\sigma_{11} = \frac{1}{b'h} P \quad \sigma_{22} = -\frac{1}{a'h} Q$$



b) Calcul de la variation de l'énergie pour le déplacement donné

$$\cdot \text{PIOLA : } \delta W = abh \left[ \frac{P}{bh} D_1 \delta u_1 - \frac{Q}{ah} D_2 \delta u_2 \right]$$

$$D_1 \delta u_1 = \frac{a'}{a} - 1 \quad D_2 \delta u_2 = \frac{b'}{b} - 1$$

$$\delta W = P (a' - a) - Q (b' - b)$$

$$\cdot \text{K.T. = } \delta W = abh \left[ \frac{P}{bh} \frac{a}{a'} \delta g_{11} - \frac{Q}{ah} \frac{b}{b'} \delta g_{22} \right]$$

$$\delta g_{11} = D_1 \delta u_1 + D_1 u_1 D_1 \delta u_1 = \left( \frac{a'}{a} - 1 \right) \left( 1 + \frac{a'}{a} - 1 \right) = \left( \frac{a'}{a} - 1 \right) \frac{a'}{a}$$

$$\delta g_{22} = \left( \frac{b'}{b} - 1 \right) \frac{b'}{b}$$

$$\delta W = P(a' - a) - Q(b' - b)$$

$$\cdot \text{EULERIENNES : } \delta W = a' b' h \left[ \frac{P}{b'h} \partial_1 \delta u_1 - \frac{Q}{ah} \partial_2 \delta u_2 \right]$$

$$\partial_1 \delta u_1 = \frac{a}{a'} D_1 \delta u_1 = \frac{a}{a'} \left( \frac{a'}{a} - 1 \right) = \frac{1}{a'} (a' - a)$$

$$\partial_2 \delta u_2 = \frac{1}{b'} (b' - b)$$

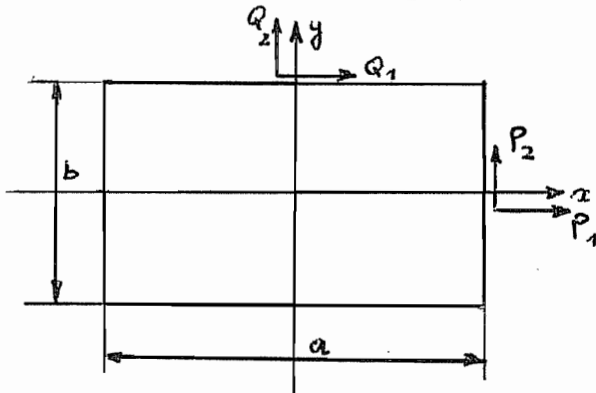
$$\delta W = P(a' - a) - Q(b' - b)$$

4. Soit un rectangle de côtés a et b et d'épaisseur h.  
Le champ de déplacements a la forme

$$u = \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

$$v = \alpha_3 x + \alpha_4 y$$

et les tensions de PIOLA y sont supposées constantes. Exprimer l'équilibre de rotation et calculer les tensions de K.T. par l'équivalence énergétique. Interpréter .



A. Les tensions de Piola ont l'interprétation suivante: la charge sur un côté vertical est donnée par le vecteur  $(P_1, P_2)$  , avec

$$P_1 = t_{11} bh ; P_2 = t_{12} bh,$$

tandis que la charge sur

un côté horizontal est donnée par le vecteur  $(Q_1, Q_2)$ , avec

$$Q_1 = t_{21} Qh \quad ; \quad Q_2 = t_{22} ah .$$

Lorsque le champ de tensions de PIOLA est constant, les équations d'équilibre de translation sont automatiquement satisfaites. En effet,

$$D_1 t_{11} + D_2 t_{21} \equiv 0,$$

$$D_1 t_{12} + D_2 t_{22} \equiv 0.$$

Quant à l'équilibre de rotation, on l'obtient en exprimant que l'énergie de déformation ne s'accroît pas lors d'une rotation après déformation. Les coordonnées spatiales sont alors

$$\xi = x+u = (1+\alpha_1) x + \alpha_2 y$$

$$\eta = y+v = \alpha_3 x + (1+\alpha_4) y.$$

si bien qu'une petite rotation à partir de cette position correspond à

$$\delta u = - \eta \delta \phi$$

$$\delta v = \xi \delta \phi$$

soit

$$\delta u = - \alpha_3 x \delta \phi - (1+\alpha_4) y \delta \phi$$

$$\delta v = (1+\alpha_1) x \delta \phi + \alpha_2 y \delta \phi ;$$

ce qui entraîne

$$D_1 \delta u = - \alpha_3 \delta \phi \quad ; \quad D_2 \delta u = - (1+\alpha_4) \delta \phi$$

$$D_1 \delta v = (1+\alpha_1) \delta \phi \quad ; \quad D_2 \delta v = \alpha_2 \delta \phi ,$$

si bien que l'on obtient la condition

$$\delta W = abh \left[ -t_{11}\alpha_3 - t_{21}(1+\alpha_4) + t_{12}(1+\alpha_1) + t_{22}\alpha_2 \right] \delta \phi = 0,$$

soit



$$-t_{11}\alpha_3 + t_{22}\alpha_2 + t_{12}(1+\alpha_1) - t_{21}(1+\alpha_4) = 0 \quad (1)$$

Passant à l'interprétation en termes d'efforts, on obtient

$$-\frac{P_1}{bh}\alpha_3 + \frac{Q_2}{ah}\alpha_2 + \frac{P_2}{bh}(1+\alpha_1) - \frac{Q_1}{ah}(1+\alpha_4) = 0.$$

Cette condition se simplifie si l'on fait les hypothèses suivantes:

- 1) Les déformations sont faibles, si bien que la partie essentielle du déplacement provient de la rotation ("petites déformations")

Dès lors, il existe un angle  $\psi$  tel que l'on puisse écrire sans grande erreur

$$\alpha_1 = (\cos\psi - 1), \quad \alpha_2 = -\sin\psi$$

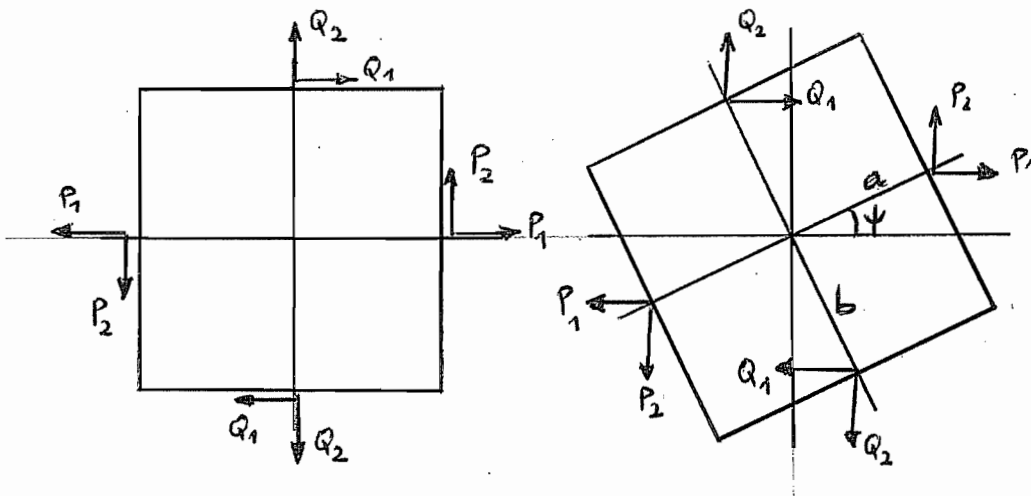
$$\alpha_3 = \sin\psi \quad \alpha_4 = (\cos\psi - 1)$$

La relation (1) devient alors

$$-(t_{11} + t_{22})\sin\psi + (t_{12} - t_{21})\cos\psi = 0,$$

soit, en termes des charges,

$$-\left(\frac{P_1}{bh} + \frac{Q_2}{ah}\right)\sin\psi + \left(\frac{P_2}{bh} - \frac{Q_1}{ah}\right)\cos\psi = 0$$



Effectivement, l'équation d'équilibre du moment s'écrit

$$P_1 ah \sin\psi + Q_2 bh \sin\psi - P_2 ah \cos\psi + Q_1 bh \cos\psi = 0$$

2) Les rotations sont, elles aussi, faibles ("petits déplacements").

Dès lors,  $\alpha_1 \ll 1$ ,  $\alpha_2 \ll 1$ ,  $\alpha_3 \ll 1$ ,  $\alpha_4 \ll 1$ ,

si bien que l'équation (1) se réduit à

$$t_{12} - t_{21} = 0,$$

c'est-à-dire l'équation classique de l'élasticité linéaire.

B. Les déformations de Green ont pour variation

$$\delta g_{11} = D_1 \delta u_1 + D_1 u_1 D_1 \delta u_1 + D_1 u_2 D_1 \delta u_2 = (1+\alpha_1)D_1 u_1 + \alpha_3 D_1 \delta u_2$$

$$\delta g_{22} = D_2 \delta u_2 + D_2 u_2 D_2 \delta u_2 + D_2 u_1 D_2 \delta u_1 = (1+\alpha_4)D_2 \delta u_2 + \alpha_2 D_2 \delta u_1$$

$$\begin{aligned} 2\delta g_{12} &= D_1 \delta u_2 + D_2 \delta u_1 + D_1 u_1 D_2 \delta u_1 + D_2 u_1 D_1 \delta u_1 + D_1 u_2 D_2 \delta u_2 + D_2 u_2 D_1 \delta u_2 \\ &= (1+\alpha_4)D_1 \delta u_2 + (1+\alpha_1)D_2 \delta u_1 + \alpha_2 D_1 \delta u_1 + \alpha_3 D_2 \delta u_2 \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \delta W &= t_{11} D_1 \delta u_1 + t_{12} D_1 \delta u_2 + t_{21} D_2 \delta u_1 + t_{22} D_2 \delta u_2 \\ &= s_{11} (1+\alpha_1) D_1 \delta u_1 + s_{11} \alpha_3 D_1 \delta u_2 + s_{22} (1+\alpha_4) D_2 \delta u_2 + s_{22} \alpha_2 D_2 \delta u_1 \\ &\quad + s_{12} (1+\alpha_4) D_1 \delta u_2 + s_{12} (1+\alpha_1) D_2 \delta u_1 + s_{12} \alpha_2 D_1 \delta u_1 + s_{12} \alpha_3 D_2 \delta u_2, \end{aligned}$$

d'où l'on tire par identification

$$t_{11} = s_{11}(1+\alpha_1) + s_{12}\alpha_2$$

$$t_{12} = s_{11}\alpha_3 + s_{12}(1+\alpha_4)$$

$$t_{21} = s_{22}\alpha_2 + s_{12}(1+\alpha_1)$$

$$t_{22} = s_{22}(1+\alpha_4) + s_{12}\alpha_3,$$

c'est-à-dire le système

$$\begin{bmatrix} (1+\alpha_1) & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & (1+\alpha_4) & 0 \\ 0 & (1+\alpha_1) & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & (1+\alpha_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{21} \\ t_{22} \end{bmatrix}$$

Ce système n'est compatible que s'il existe une combinaison linéaire nulle des lignes :

$$\lambda_1(1+\alpha_1) + \lambda_2\alpha_3 = 0 \quad (2)$$

$$\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2(1+\alpha_4) + \lambda_3(1+\alpha_1) + \lambda_4\alpha_3 = 0 \quad (3)$$

$$\lambda_3\alpha_2 + \lambda_4(1+\alpha_4) = 0 \quad (4)$$

Les équations (2) et (4) sont vérifiées si :

$$\lambda_1 = \alpha_3, \quad \lambda_2 = -(1+\alpha_1)$$

$$\lambda_3 = \beta(1+\alpha_4), \quad \lambda_4 = -\beta\alpha_2.$$

De (3), on tire alors :

$$\alpha_2 \alpha_3 - (1+\alpha_1)(1+\alpha_4) + \beta(1+\alpha_4)(1+\alpha_1) - \beta\alpha_2 \alpha_3 = 0 ,$$

soit  $\beta = 0$ , c'est-à-dire

$$\lambda_1 = \alpha_3 , \lambda_2 = -(1+\alpha_1) , \lambda_3 = (1+\alpha_4) , \lambda_4 = -\alpha_2$$

On obtient ainsi la condition

$$\lambda_1 t_{11} + \lambda_2 t_{12} + \lambda_3 t_{21} + \lambda_4 t_{22} = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$t_{11} \alpha_3 - (1+\alpha_1)t_{12} + t_{21} (1+\alpha_4) - \alpha_2 t_{22} = 0 :$$

on retrouve la condition (1).

Examinons ce que valent les tensions de K.T. si le déplacement diffère peu d'une rotation (petites déf.)

$$1+\alpha_1 = \cos\psi \quad ; \quad \alpha_2 = -\sin\psi \quad ; \quad \alpha_3 = \sin\psi \quad ; \quad (1+\alpha_4) = \cos\psi$$

Il vient

$$t_{11} = s_{11} \cos\psi - s_{12} \sin\psi \quad (5)$$

$$t_{12} = s_{11} \sin\psi + s_{12} \cos\psi \quad (6)$$

$$t_{21} = -s_{22} \sin\psi + s_{12} \cos\psi \quad (7)$$

$$t_{22} = s_{22} \cos\psi + s_{12} \sin\psi \quad (8)$$

$$(5) \text{ et } (6) \rightarrow t_{11} \cos\psi + t_{12} \sin\psi = s_{11}$$

$$t_{12} \cos\psi - t_{11} \sin\psi = s_{12}$$

$$(7) \text{ et } (8) \rightarrow t_{21} \cos\psi + t_{22} \sin\psi = s_{12}$$

$$t_{22} \cos\psi - t_{21} \sin\psi = s_{22},$$

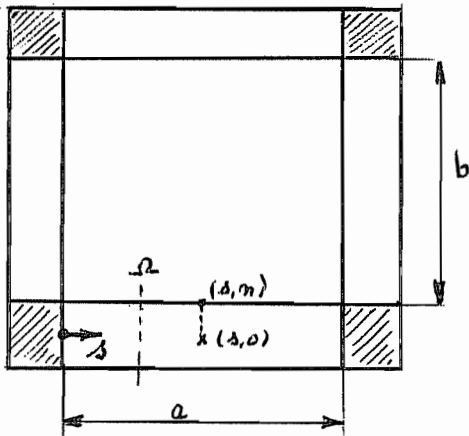
L'équilibre de rotation s'exprime alors par

$$t_{12} \cos\psi - t_{11} \sin\psi = s_{12} = t_{21} \cos\psi + t_{22} \sin\psi,$$

soit

$$(t_{12} - t_{21}) \cos\psi - (t_{11} + t_{22}) \sin\psi = 0$$

### III. DISLOCATION DE VOLTERRA



Le caisson ci-contre est composé de deux éléments de longueur  $a$ , de deux éléments de longueur  $b$ , et de quatre coins, carrés parfaitement rigides.

On repère un point du cadre par

- la coordonnée  $s$ , longueur de poutre parcourue

- la coordonnée normale  $n$ .

Le champ de déformations est de la forme

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon(s) + n \alpha(s) ; \varepsilon_{sn} = 0 ; \varepsilon_{nn} = 0 \quad (\text{déf. plane})$$

a) Le champ ci-dessus est-il compatible localement?

b) Quelles sont les conditions de fermeture ?

#### Solution

a) Le champ de déformations doit vérifier les équations de compatibilité de SAINT-VENANT

$$T_{ij} = 0$$

$$T_{11} = D_{22} \varepsilon_{33} + D_{33} \varepsilon_{22} - 2 D_{23} \varepsilon_{23}$$

$$T_{22} = D_{33} \varepsilon_{11} + D_{11} \varepsilon_{33} - 2 D_{31} \varepsilon_{31}$$

$$T_{33} = D_{11} \varepsilon_{22} + D_{22} \varepsilon_{12} - 2 D_{12} \varepsilon_{12}$$

$$T_{23} = - D_{23} \varepsilon_{11} + D_1 (D_2 \varepsilon_{31} + D_3 \varepsilon_{12} - D_1 \varepsilon_{23})$$

$$T_{31} = - D_{31} \varepsilon_{22} + D_2 (D_3 \varepsilon_{12} + D_1 \varepsilon_{23} - D_2 \varepsilon_{31})$$

$$T_{12} = -D_{12} \epsilon_{33} + D_3 (D_1 \epsilon_{23} + D_2 \epsilon_{31} - D_3 \epsilon_{12})$$

Nous obtenons ( $\xi \equiv 1, n \equiv 2$ )

$$T_{11} = 0 \rightarrow D_{33} \epsilon_{nn} = 0 \quad \text{trivial}$$

$$T_{22} = 0 \rightarrow D_{ss} \epsilon_{nn} + D_{nn} \epsilon_{ss} - 2 D_{sn} \epsilon_{sn} = 0$$

$$T_{23} = 0 \rightarrow \text{trivial}$$

$$T_{31} = 0 \rightarrow \text{trivial}$$

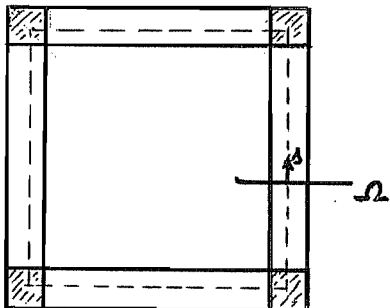
$$T_{12} = 0 \rightarrow \text{trivial}$$

Dans notre cas,

$$D_{nn} \epsilon_{ss} = 0,$$

car  $\epsilon_{ss}$  est linéaire en  $n$ . Dès lors, puisque  $\epsilon_{nn} \equiv 0, \epsilon_{sn} \equiv 0$ , les déformations sont localement compatibles.

b) Considérons une section de référence  $\Omega$ . Il faut que, après avoir fait le tour du caisson, on retrouve le même déplacement qu'au départ, soit, sur courbe quelconque :



$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\partial u_s}{\partial u} ds = 0$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathcal{C}} [\epsilon(s) + n \alpha(s)] ds = 0.$$

En suivant deux courbes  $n = \text{cte}$ , on obtient les deux conditions

$$\int_{\mathcal{C}} \epsilon(s) ds = 0$$

$$\int_{\mathcal{C}} \alpha(s) ds = 0$$

#### IV. PRINCIPES VARIATIONNELS

##### Introduction

Les principes variationnels constituent l'outil de base pour les approximations en théorie des structures. Leur utilisation présente les avantages suivants :

- les hypothèses doivent être formulées explicitement
- les conséquences de ces hypothèses peuvent être mises en évidence
- les conditions aux limites résultant de l'application du principe ne sont jamais surabondantes.

Les différents principes que nous utiliserons sont :

##### a) Le principe de variation des déplacements (P.V.D.)

$$\int_V W(Du) dV - \int_V \bar{f}_i u_i dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS \quad \min_{u \in U},$$

U étant l'espace des déplacements cinématiquement admissibles, c'est-à-dire :

- 1) Il faut que:  $\int_V W(Du) dV$  ait un sens mathématique, ce qui implique que les  $\varepsilon_{ij}$  soient de carrés sommables.

Cette condition est vérifiée si

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i \in C^0(V) \\ \text{et} \\ u_i \text{ continûment dérivable par morceaux.} \end{array} \right.$$



## 2) Les conditions

$$u_i = \bar{u}_i, \text{ sur } S_1$$

doivent être vérifiées.

b) Le principe de variation des tensions (P.V.T.)

$$\int_V \Phi(\sigma) dV - \int_{S_1} t_i \bar{u}_i dS \quad \min_{\sigma \in \Sigma}$$

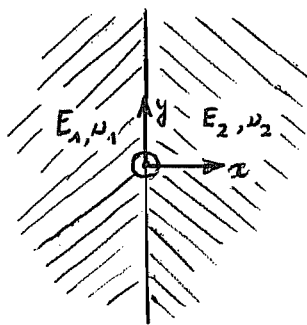
$\Sigma$  étant l'espace des tensions statiquement admissibles, c'est-à-dire :

- 1) Il faut que  $\int_V \Phi(\sigma) dV$  existe, ce qui implique que les tensions soient de carrés sommables.
- 2) Il faut que l'équilibre soit vérifié. Lorsque les tensions ne sont que continûment dérivables par morceaux, cela implique :

$$\cdot D_j \sigma_{ji} + f_i = 0 \quad \text{dans les ensembles où } \sigma_{ji} \in C^1$$

$$\cdot n_j (\sigma_{ji}^+ - \sigma_{ji}^-) = 0 \text{ sur les lignes de discontinuité}$$

A ce sujet, il convient de se détacher de l'idée que les tensions sont toujours continues. Ainsi, à la jonction de deux matériaux différents, les conditions de passage sont (Etat plan de contrainte)



$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{11}^{(1)} \\ \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}^{(1)} \\ \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{22}^{(1)} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(Equilibre)} \\ \text{(Compatibilité)} \end{array}$$

On a donc

$$\varepsilon_{22}^{(2)} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{22}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{11}^{(2)}) = \varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{22}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{11}^{(1)}),$$

soit

$$\frac{\sigma_{22}^{(2)}}{E_2} - \frac{\sigma_{22}^{(1)}}{E_1} = \left( \frac{\nu_2}{E_2} - \frac{\nu_1}{E_1} \right) \sigma_{11} \neq 0$$

3) Enfin, il convient que

$$\eta_j \sigma_{ji} = \bar{t}_i \text{ sur } S_2 .$$

c) Le principe de Hellinger-Reissner (P.C.)

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dV - \int_V \phi(\sigma) dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_V f_i u_i dV$$

$$\begin{array}{ll} \max & \min \\ \sigma \in \mathcal{L} & u \in U ; \end{array}$$

où  $u$  est l'espace des fonctions cinématiquement admissibles, tandis que  $\mathcal{L}$  est l'espace des tensions telles que les intégrales ci-dessus aient un sens.

### Approximations

Les approximations consistent toujours à faire des hypothèses sur les déplacements ou sur les tensions. Il s'agit donc d'une restriction des espaces  $U$ ,  $\Sigma$  ou  $\mathcal{L}$  et  $U$ .

Or, à chaque fonction de  $U$ ,  $\Sigma$ , ou  $\mathcal{L}$  est associée une condition. Ces conditions portent

- sur les équations d'équilibre dans le P.V.D.
- sur la compatibilité dans le P.V.T.
- sur l'équilibre pour  $U$  } dans le P.C.
- la compatibilité pour  $\mathcal{L}$

Par conséquent, restreindre les possibilités de variation, c'est perdre des conditions.

Ainsi, la théorie de BARRE de SAINT-VENANT des poutres est la solution exacte de l'élasticité dans le cadre des hypothèses

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

On constate que cette théorie implique la constance de l'effort tranchant. L'application de ces mêmes conditions dans le principe canonique mène à la suppression des termes

$$\int_V \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dV,$$

ce qui signifie que les équations

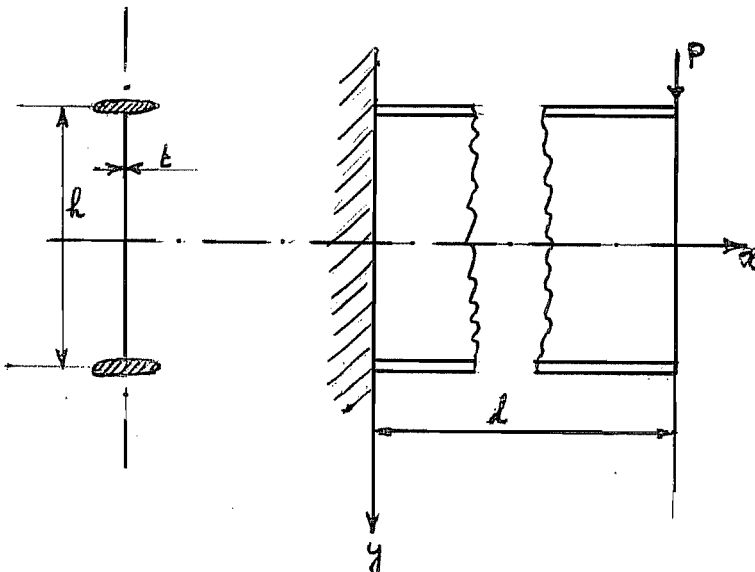
$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ne seront plus assurées. En particulier, les équations

$$\epsilon_x = -\nu \epsilon_z, \quad \epsilon_y = \nu \epsilon_z, \quad \gamma_{xy} = 0$$

de la théorie de St-Venant, qui sont responsables des déformations anticlastiques, ne sont pas nécessairement vérifiées. C'est à l'utilisateur du principe qu'il incombe de spécifier ce que seront  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ . Bien entendu, il est très délicat de faire un choix convenable, ce qui ôte une grande partie de son intérêt au principe canonique.

1. Approche statiquement admissible pour une poutre console en double T.



La poutre en double T représentée ci-contre est idéalisée de la manière suivante: les semelles sont supposées parfaitement souples en flexion, et on n'y considère donc que l'effort normal de résultante N; quant à l'âme, on admet qu'elle ne résiste qu'au cisaillement. Calculer le déplacement d'extrémité sous une charge P.

a) Etudions d'abord l'équilibre dans l'âme: comme la seule tension est par hypothèse  $\tau_{xy}$ , on a donc

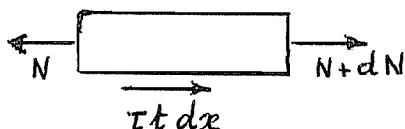
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0,$$

ce qui permet de considérer  $\tau = \tau_{xy}$  comme une constante. L'énergie de déformation de l'âme vaut

$$\int_0^l \frac{\tau^2}{2G} ht \, dx = \frac{\tau^2}{2G} hlt$$

b) Passons à la jonction âme-semelle pour la semelle supérieure. La semelle étant caractérisée par sa seule tension d'extension, il faut déterminer l'équation de jonction de la manière suivante:



le schéma ci-contre conduit directement à l'équation d'équilibre élémentaire

$$dN + \tau t \, dx = 0,$$

soit

$$\frac{dN}{dx} = - \tau t \quad \Rightarrow \quad N(x) = N(0) - \tau t x$$

Enfin, comme à l'extrémité de la poutre,  $N(\ell) = 0$ ,

on a

$$N(0) = \tau t \ell ,$$

d'où

$$N(x) = \tau t (\ell - x)$$

L'énergie de déformation de la semelle s'écrit donc

$$\int_0^\ell \frac{\tau^2 t^2 (\ell - x)^2}{2EA} dx = \frac{\tau^2 t^2}{2EA} \frac{\ell^3}{3}$$

c) La semelle inférieure subit, au signe près, la même sollicitation que la semelle supérieure: son énergie vaut donc également

$$\frac{\tau^2 t^2}{2EA} \frac{\ell^3}{3}$$

d) Au total, on a donc une énergie (complémentaire) de déformation donnée par

$$\Phi = \frac{\tau^2}{2} \left[ \frac{th\ell}{G} + \frac{2t^2\ell^3}{3EA} \right]$$

Considérons alors un déplacement  $v$  imposé à l'extrémité. Le terme correspondant d'énergie potentielle s'écrit :

$$- \tau \int_{-h/2}^{h/2} v t dy = - \tau h t \bar{v}$$

où  $\bar{v}$  est le déplacement moyen conjugué au cisaillement  $I$  :

$$\bar{v} = \frac{1}{ht} \int_{-h/2}^{h/2} vt dy$$

En termes de la charge totale  $P = \tau ht$ , qui doit être uniformément répartie pour respecter les hypothèses du modèle, l'énergie potentielle s'écrit encore ( $- P \bar{v}$ ).

Le principe de variation des tensions s'écrit alors

$$\frac{\tau}{2} \left[ \frac{th\ell}{G} + \frac{2t^2\ell^3}{3EA} \right] - \bar{v} h t \tau \quad \min_{\tau}$$

La solution est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{v} h t &= \tau \left[ \frac{ht}{G} + 2 \frac{t^2\ell^3}{3EA} \right] \\ &= \tau ht \left[ \frac{\ell}{G} + \frac{2}{3} \frac{t\ell^3}{EAh} \right] = P \left[ \frac{\ell}{G} + \frac{2}{3} \frac{t\ell^3}{EAh} \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{v} = \frac{2}{3} \frac{P\ell^3}{EAh^2} + \frac{P\ell}{Ght}$$

Le premier terme correspond à la déformation de flexion, le second à la déformation due à l'effort tranchant. On peut mettre la solution sous la forme classique

$$\bar{v} = \frac{P\ell^3}{3EI} + \frac{P\ell}{G\Omega^*},$$

ce qui conduit à

$$I = 2EA \frac{h^2}{4}, \quad \Omega^* = ht$$

e) Soulignons en passant les incompatibilités que peut entraîner l'utilisation d'un modèle équilibre. Si l'on veut intégrer le champ de déplacements dans l'âme, on peut utiliser la relation

$$I = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

et y ajouter les conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

correspondant aux hypothèses  $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$ . On a donc

$$u = u(y), \quad v = v(x)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau}{G} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u &= \alpha y \\ v &= \beta x, \end{aligned}$$

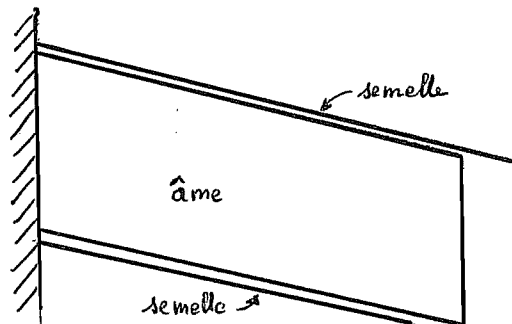
avec  $\alpha, \beta = \text{ctes.}$  Dès lors, comme  $u = 0$  à l'encastrement, on a partout

$$u = 0, \quad v = \frac{\tau}{G} x.$$

Remarquons que dans le cas général, même cette intégrabilité locale n'est pas garantie! Passons aux semelles: on a

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{EA} \frac{dN}{dx} = -\tau t,$$

d'où  $u = -\tau t x$ . On constate donc que le déplacement est fortement discontinu à la jonction âme-semelle, comme le montre le dessin ci-dessous:



2. Approche cinématiquement admissible d'une poutre en double T.

On considère la même poutre en double T que dans l'exercice précédent. On néglige toujours la raideur en flexion des semelles; on admet que dans l'âme, les déplacements ont la forme

$$u = \alpha(x)y, \quad v = v(x);$$

on considère en outre que l'âme est en état plan de tension. Les déplacements sont supposés continus, si bien que les semelles, d'épaisseur très faible, ont les déplacements

$$u = \alpha(x) \frac{h}{2}, \quad v = v(x).$$

Calculer le déplacement sous une charge P d'extrémité.

a) Calcul de l'énergie d'une semelle en un point x:

$$W_1 = \frac{1}{2} E A \frac{h^2}{4} \epsilon_{xx}^2 = \frac{1}{2} EA \frac{h^2}{4} \alpha'^2$$

b) Calcul de l'énergie de l'âme :

$$\epsilon_{xx} = \alpha'$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha + v'$$

L'état plan de tension est caractérisé par une énergie de la forme

$$\frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu} \left[ \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + 2\nu \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \right] + \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2,$$

ce qui donne donc

$$\begin{aligned} W_a &= \frac{1}{2} t \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu} \alpha'^2 y^2 dy + \frac{t}{2} \int_{-h/2}^{h/2} G(\alpha+v')^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{E}{1-\nu} \frac{th^3}{12} \alpha'^2 + Gth(\alpha+v')^2 \right] \end{aligned}$$



c) Au total, on a donc

$$\begin{aligned}
 W &= 2W_s + W_a = \frac{1}{2} E \alpha'^2 \left( \frac{\text{th}^3}{12(1-\nu^2)} + 2A \frac{h^2}{4} \right) + \frac{1}{2} G \text{th}(\alpha+\nu')^2 \\
 &= \frac{1}{2} E I \alpha'^2 + \frac{1}{2} G \Omega^* (\alpha+\nu')^2,
 \end{aligned}$$

avec

$$I = \frac{\text{th}^3}{12(1-\nu^2)} + 2A \frac{h^2}{4}$$

$$\Omega^* = Ght,$$

ce qui permet d'écrire le principe de variation des déplacements sous la forme

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} [EI\alpha'^2 + G \Omega^* (\alpha+\nu')^2] dx - Pv(\ell) \quad \min_{\alpha, \nu}$$

Les variations de  $\alpha$  et  $\nu$  conduisent aux systèmes suivants :

$$\delta\alpha \rightarrow -EI\alpha'' + G \Omega^* (\alpha+\nu')' = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[$$

$$\alpha(0) = 0$$

$$EI\alpha'(\ell) = 0$$

$$\delta\nu \rightarrow -G \Omega^* (\alpha+\nu')'$$

$$\nu(0) = 0$$

$$G \Omega^* (\alpha+\nu') \Big|_{x=\ell} = P$$

On a donc d'une part :

$$\alpha'' = \frac{P}{EI} \Rightarrow \alpha' = \frac{P}{EI} (x-\ell) \Rightarrow \alpha = \frac{P}{EI} \left( \frac{x^2}{2} - \ell x \right),$$

en tenant compte des conditions aux limites;

- d'autre part :

$$v' = \frac{P}{G\Omega^*} - \alpha = P \left[ \frac{1}{G\Omega^*} + \frac{1}{EI} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \right],$$

d'où

$$v = P \left[ \frac{x}{G\Omega^*} + \frac{1}{EI} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right],$$

et, en particulier :

$$v(l) = P \left[ \frac{l}{G\Omega^*} + \frac{l^3}{3EI} \right]$$

C'est la même expression que dans l'exercice précédent, mais le moment d'inertie I a changé: à présent ,

$$I = 2A \frac{h^2}{4} + \frac{th^3}{12(1-\nu^2)} > 2A \frac{h^2}{4}$$

d) Montrons qu'il existe un déséquilibre à la jonction âme-semelle dans l'âme :

$$\tau_{xy} = G(\alpha + v') = \frac{P}{\Omega^*} = \frac{P}{ht} \Rightarrow t \tau_{xy} = \frac{P}{h}$$

Dans les semelles ,

$$N = \pm E A \alpha' \frac{h}{2} = \pm P \frac{Ah}{2I} (x-l)$$

et

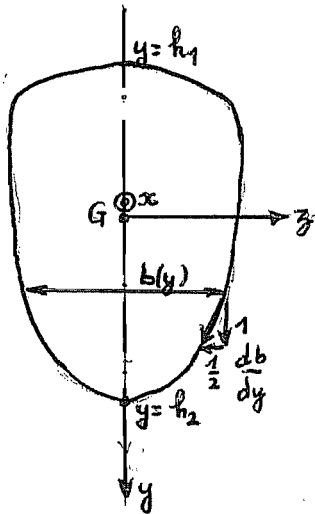
$$\frac{dN}{dx} = \frac{PAh}{2I} = \frac{PAh}{\frac{th^3}{6(1-\nu^2)} + Ah^2} = \frac{P}{h} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{6(1-\nu)} \frac{th}{A}} \right]$$

Le déséquilibre se manifeste par le facteur

$$\frac{1}{1 + \frac{th}{2A(1-\nu^2)}},$$

qui est d'autant plus proche de 1 que  $\frac{th}{A}$  est petit.

3. Flexion d'une poutre à section symétrique par rapport au plan xOy



3.1. HYPOTHESES

On fait les hypothèses suivantes :

a)  $b(y)$  est lipschitzienne, de façon que  $\frac{db}{dy}$  soit définie presque partout

b)  $\sigma_{12} = \sigma_{12}(x,y) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial z} = 0 \right)$

c)  $\sigma_{11} = \frac{My}{I}$

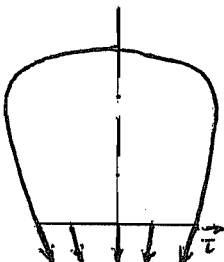
d) on postule l'équilibre sur la surface latérale: par conséquent,

$$\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0,$$

c'est-à-dire que le vecteur  $(\sigma_{12}, \sigma_{13})$  est multiple du vecteur tangent cte  $(1, \frac{1}{2} \frac{db}{dy}) \Rightarrow \sigma_{13} \Big|_{z=\pm \frac{b}{2}} = \pm \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \sigma_{12}$

A l'intérieur, on interpole linéairement par  $\sigma_{13} = \frac{z}{l} \frac{db}{dy} \sigma_{12}$

L'interprétation de cette condition est donnée à la figure ci-contre.



On considèrera, pour fixer les idées, une poutre console chargée en bout par une distribution de charges  $\vec{t} = (t_y, t_z)$  de résultante P selon l'axe y. La forme nécessaire de la distribution sera précisée plus loin. Ecrivons le principe de REISSNER :

$$\int_0^l dx \int_{\Omega} \left[ \frac{My}{I} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{z}{b} \frac{db}{dy} \sigma_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] d\Omega$$

$$- \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx - \int_0^l dx \int_r^{\sigma} \frac{12 \left( 1 + \frac{z^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right)}{2G} d\Omega - \int_{\Omega} [t_y v(\ell) + t_z w(\ell)]$$

stat.

### 3.2. VARIATIONS

1. La variation du moment M fournit l'équation (moments-rot.)

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega} \frac{uy}{I} d\Omega - \frac{M}{EI} = 0 \quad \text{soit} \quad M = EI\alpha', \quad (1)$$

$$\text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{I} \int_{\Omega} u y d\Omega \quad (2)$$

2. La variation du déplacement u est particulièrement instructive; elle conduit en effet à l'équation

$$-y \frac{dM}{dx} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} - \frac{1}{b} \frac{db}{dy} \sigma_{12} = 0 \quad \text{à l'intérieur,} \quad (3)$$

l'équation de surface étant résolue a priori. Résolvons cette dernière équation. L'équation homogène en  $\sigma_{12}$  s'écrit

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{1}{b} \frac{db}{dy} \sigma_{12} = 0,$$

soit

$$\frac{\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}}{\sigma_{12}} + \frac{\frac{db}{dy}}{b} = 0;$$

elle admet donc la solution

$$\ln \sigma_{12} = \ln b + \ln C(x),$$

soit

$$\sigma_{12} = \frac{C(x)}{b}. \quad (4)$$

On obtient aisément une solution particulière de (3) par la méthode de variation des constantes, substituant (4) dans (3), on obtient en supposant  $\frac{\partial C}{\partial y} \neq 0$ ,

$$\frac{1}{b} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{C}{b^2} \frac{db}{dy} + \frac{C}{b^2} \frac{db}{dy} = -\frac{y}{I} \frac{dM}{dx}$$

d'où

$$\frac{\partial C}{\partial y} = - \frac{by}{I} \frac{dM}{dx},$$

dont une solution est

$$C = - \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} \int_{h_1}^y b(\eta) \eta \, d\eta$$

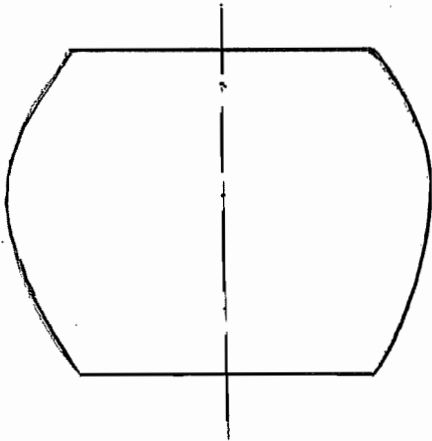
On constate que cette solution convient parfaitement, car

$$C(x, h_1) = 0 \quad (\text{trivial})$$

$$C(x, h_2) = - \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} \int_{h_1}^{h_2} b(\eta) \eta \, d\eta = - \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} \int_{\Omega} y \, d\Omega = 0.$$

si l'on a choisi l'origine au centre de gravité de la section.

En particulier, la section peut se terminer par un plat en  $h_1$  et  $h_2$ , car on aura de toute façon  $\sigma_{12} = 0$  en ces points. Selon l'usage, nous écrirons



$$\sigma_{12} = - \frac{dM}{dx} \frac{S(y)}{Ib(y)}, \quad (5)$$

avec

$$S(y) = \frac{1}{I} \int_{h_1}^y b(\eta) \, d\eta \quad (6)$$

(moment statique de la partie  $[\bar{h}_1, \bar{y}]$  de la section)

3. La variation du déplacement  $v$  entraîne

$$- \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} = 0 \text{ à l'intérieur (constance de l'effort tranchant)}$$

$\sigma_{12} = t_y$  à l'extrémité. Dès lors,  $t_y$  doit avoir la forme (5), soit

$$- \text{cte} \cdot \frac{S(y)}{b(y)I}$$

4. La variation du déplacement  $w$  fournit l'équation

$$- \frac{z}{b} \frac{db}{dy} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} = 0 \text{ à l'int. (constance de l'effort tranchant).}$$

$$\sigma_{12} \frac{z}{b} \frac{db}{dy} = t_z \text{ à l'extrémité}$$

On constate que le mode de chargement doit être assez particulier!

5. Varions  $\sigma_{12}(x,y)$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{z}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dz = \frac{\sigma_{12}^b}{G} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right]$$

$\delta$  (déformation équivalente)

3.3. Cisaillement moyen et section de cisaillement

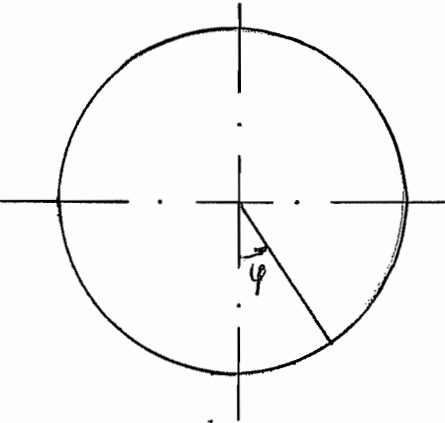
$$\begin{aligned} 1. \text{ On a } & \int_{\Omega} \sigma_{12} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{z}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] d\Omega \\ & = - \frac{M'}{I} \int_{\Omega} \frac{S(y)}{b} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{z}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] d\Omega \\ & = - M' \gamma \quad \gamma = \text{cisaillement équivalent} \\ \gamma & = \frac{1}{I} \int_{h_1}^{h_2} \frac{S(y)}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{z}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int_{\Omega} \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{2G} d\Omega & = \frac{M'^2}{2GI^2} \int_{\Omega} \frac{S^2}{b^2} \left[ 1 + \frac{z^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] d\Omega \\ & = \frac{M'^2}{2G\Omega^*} \end{aligned}$$

$$\text{où } \Omega^*, \text{ section de cisaillement} = \frac{I^2}{\int_{\Omega} \frac{S^2}{b^2} \left[ 1 + \frac{z^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] d\Omega}$$

$$\Omega^* = \frac{I^2}{\int_{h_1}^{h_2} \frac{S^2}{b} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] dy}$$

### 3.4. Exemple : Cercle



$$y = R \cos \phi \quad dy = -R \sin \phi \, d\phi$$

$$b = 2R \sin \phi$$

$$S(y) = - \int_{h_1}^y 2R \sin \phi \, R \cos \phi \, R \sin \phi \, d\phi$$

$$= -2R^3 \int_0^\theta \sin^2 \phi \cos \phi \, d\phi =$$

$$-2R^3 \left[ \frac{\sin^3 \phi}{3} \right]_0^\theta = -\frac{2R^3 \sin^3 \theta}{3}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{S^2}{b} \, dy = 2 \int_0^\pi \frac{R^6 \sin^6 \theta}{9R \sin \theta} \, R \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{9} R^6 \int_0^\pi \sin^6 \theta \, d\theta = \frac{5\pi}{72} R^6$$

$$\frac{db}{dy} = -\frac{2R \cos \phi \, d\phi}{R \sin \phi \, d\phi} = -2 \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{S^2}{b} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \, dy = \frac{8R^6}{9} \int_0^\pi \sin^4 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi R^6}{18}$$

$$\text{Total : } R^6 \left( \frac{5}{72} + \frac{1}{12 \cdot 18} \right) = \frac{16}{216} \pi R^6 = \frac{2}{27} \pi R^6$$

$$I = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\Rightarrow \Omega^* = \frac{\pi^2 R^8 \cdot 27}{16 \cdot 2 \cdot \pi R^6} = \Omega \cdot \frac{27}{32} = \frac{\Omega}{1,185}$$

4. Torsion d'une poutre à section rectangulaire

On fait les hypothèses suivantes :

$$\sigma_{xx} = 0, \sigma_{yy} = 0, \tau_{xy} = 0$$

$$u = -\theta y$$

$$v = \theta x$$

$$w = k xy,$$

ce dernier champ servant à modéliser le gauchissement de torsion. On a donc

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = ky - \theta'y = (k-\theta') y$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = kx + \theta'x = (k+\theta') x$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = k'xy$$

Dès lors, l'énergie d'extension s'écrit, pour l'unité de longueur

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} E k'^2 x^2 y^2 d\Omega = \frac{1}{2} EI_x I_y k'^2,$$

tandis que l'énergie de cisaillement vaut

$$\frac{1}{2} G \int_{\Omega} [(k-\theta')^2 y^2 + (k+\theta')^2 x^2] d\Omega = \frac{1}{2} GI_x (k-\theta')^2 + \frac{1}{2} GI_y (k+\theta')^2$$

Considérons le cas d'un moment d'extrémité: on obtient

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left[ E \frac{I_x I_y}{\Omega} k'^2 + G I_x (k-\theta')^2 + G I_y (k+\theta')^2 \right] dz = M\theta(L) \text{ stat}$$

Varions séparément k et  $\theta$  : il vient



$$\delta k \rightarrow - \frac{EI_x I_y}{\Omega} k'' + GI_x (k - \theta') + GI_y (k + \theta') = 0$$

$$\text{dans } ]0, L[ \quad (1)$$

et aux limites :

$$\left[ EI_x I_y k' \delta k \right]_0^L = 0 \quad (2)$$

$$\delta \theta \rightarrow - GI_x (\theta' - k)^1 - GI_y (\theta' + k)^1 = 0 \quad \text{dans } ]0, L[ \quad (3)$$

$$\theta = 0 \text{ du } z = 0 \quad (4)$$

$$\left[ G I_x (\theta' - k) + G I_y (\theta' + k) \right] = M \text{ en } z = L \quad (5)$$

Pour les conditions aux limites sur le gauchissement, nous ferons deux hypothèses:

#### 4.1. Le gauchissement est libre en $z = 0$

On a donc  $EI_x I_y k' = 0$  en  $z = 0$  et  $z = L$   
 Montrons qu'il existe une solution telle que  $k'' = 0$ : en effet, on déduit alors de (1)

$$I_x (k - \theta') + I_y (k + \theta') = 0 ,$$

soit

$$k(I_x + I_y) - \theta' (I_x - I_y) = 0$$

c'est-à-dire

$$k = \theta' \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} \quad (6)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
M &= G I_x (\theta' - k) + G I_y (\theta' + k) \\
&= G(I_x + I_y) \theta' + G(I_y - I_x) k \\
&= G \left[ (I_x + I_y) - \frac{(I_x - I_y)^2}{I_x + I_y} \right] \theta' \\
&= G \left[ \frac{I_x^2 + 2 I_x I_y + I_y^2 - I_x^2 + 2 I_x I_y - I_y^2}{I_x + I_y} \right] \theta' \\
&= G \cdot \frac{4 I_x I_y}{I_x + I_y} \theta' \tag{7}
\end{aligned}$$

On remarquera que :

a) selon la présente théorie, le gauchissement s'annule si

$$I_x = I_y$$

b) le gauchissement a pour effet de diminuer la raideur en torsion :

c) Pour les sections minces,  $I_y \ll I_x$ ,  
et

$$M = 4G \frac{I_y}{1 + \frac{I_y}{I_x}} \theta' \approx 4G I_y \theta',$$

ce qui correspond à la formule classique des sections minces ( $\frac{1}{3} G h b^3$ ).

#### Comparaison avec d'autres solutions

soit :  $I_y$  le petit moment d'inertie . On a

$$C = \frac{M}{\theta'} = \frac{4G I_y}{1 + \frac{I_y}{I_x}}$$

On a

$$\frac{I_y}{I_x} = \frac{hb^3}{bh^3} = \left(\frac{b}{h}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \quad \text{avec } n = \frac{h}{b} (>1)$$

Il vient alors

$$C = 4GI_y \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} \right] =$$

La solution de COULOMB donne

$$C(Cb) = G(I_y + I_x) = 4GI_y \left[ \frac{1 + \frac{I_x}{I_y}}{4} \right] = 4GI_y \cdot \frac{n^2 + 1}{4}$$

et celle des sections minces :

$$C(SM) = 4GI_y$$

Posant

$$C_1 = \frac{C}{4GI_y}$$

on obtient:

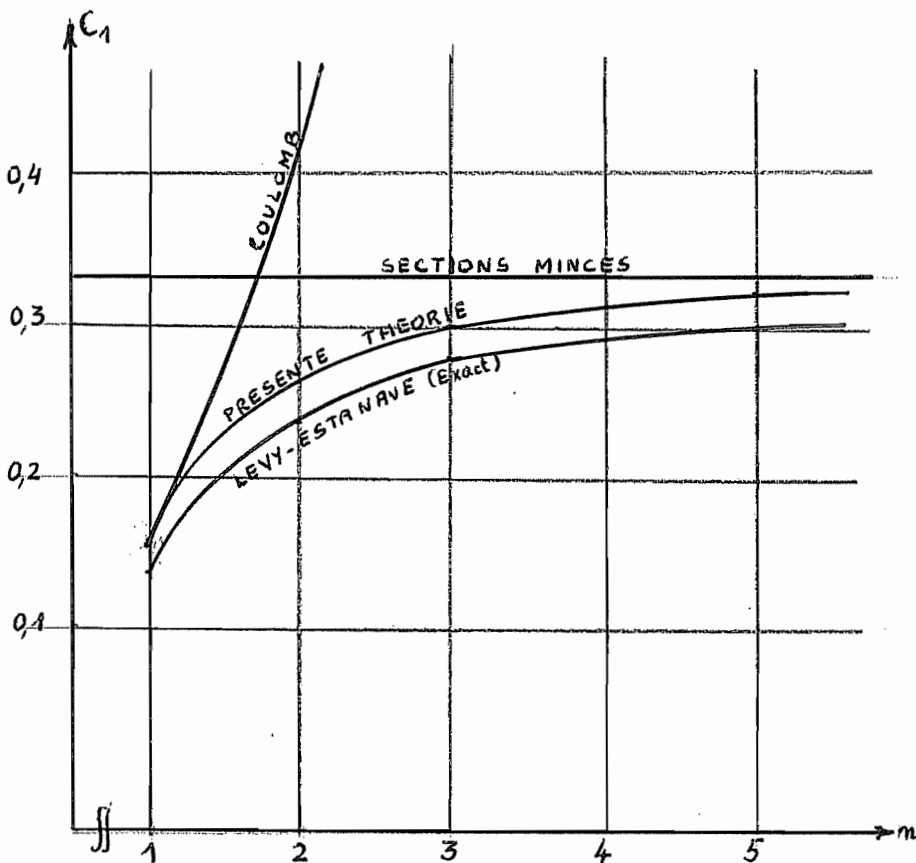
$$C_1 = \frac{1}{3\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}$$

$$C_1(Cb) = \frac{n^3 + 1}{12}$$

$$C_1(SM) = \frac{1}{3}$$

Le tableau suivant donne la comparaison de ces diverses solutions avec la solution exacte de LEVY-ESTANAVE

n	1	2	3	4	5	$\infty$
$C_1$	0,167	0,266	0,300	0,314	0,320	0,333
$C_1$ (SM)	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
$C_1$ (Cb)	0,167	0,416	0,833	1,375	2,167	$\infty$
$C_1$ (L.E.)	0,141	0,229	0,263	0,281	0,292	0,333



La raideur est surestimée, comme il fallait s'y attendre. Mais les résultats sont très valables, compte tenu de la simplicité de la théorie.

#### 4.2. Le gauchissement est bloqué en $z = 0$ (encastrement parfait)

Des équations (3) et (5), on déduit

$$G (I_x + I_y) \theta' + G (I_x - I_y) k = M,$$

soit

$$\theta' = \frac{M}{G(I_x + I_y)} + k \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y}$$

Réintroduisons cette valeur dans (1) : il vient successivement

$$- E \frac{I_x I_y}{\Omega} k'' + G(I_x + I_y)k + G(I_y - I_x)\theta' = 0$$

$$- E \frac{I_x I_y}{\Omega} k'' + G(I_x + I_y)k - Gk \frac{(I_x - I_y)^2}{I_x + I_y} + M \frac{I_y - I_x}{I_y + I_x} = 0$$

$$- E \frac{I_x I_y}{\Omega} k'' + G \frac{4I_x I_y}{I_x + I_y} + M \frac{I_y - I_x}{I_y + I_x} = 0$$

$$k'' - \frac{4G \Omega}{E(I_x + I_y)} k = M \frac{\Omega(I_y - I_x)}{E(I_x + I_y)I_x I_y}$$

Posant

$$\beta^2 = \frac{4G \Omega}{E(I_x + I_y)},$$

on obtient la solution générale

$$k_0 = A \operatorname{ch} \beta x + B \operatorname{sh} \beta x$$

pour l'équation homogène; une solution particulière de l'équation complète est

$$k_p = + \frac{M(I_x - I_y)}{4 G I_x I_y}$$

La solution générale de l'équation est donc

$$k = k_o + k_p = \frac{M(I_x - I_y)}{4 G I_x I_y} + A \operatorname{ch} \beta z + B \operatorname{sh} \beta z$$

La condition  $k(0) = 0$  entraîne

$$A = - \frac{M(I_x - I_y)}{4 G I_x I_y} ;$$

la condition  $k'(L) = 0$  conduit à

$$B = - A \operatorname{th} \beta L$$

Il vient donc finalement

$$k = \frac{M(I_x - I_y)}{4 G I_x I_y} [1 - \operatorname{ch} \beta z + \operatorname{th} \beta L \operatorname{sh} \beta z]$$

On remarquera que, pour  $\beta L \gg 1$ , et  $\beta z$  suffisamment grand,

$$\operatorname{th} \beta L \approx 1, \quad \operatorname{ch} \beta z \approx \operatorname{sh} \beta z,$$

et on converge vers le gauchissement du cas précédent (libre).

La torsion  $\theta'$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{M}{G(I_x + I_y)} + k \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} \\ &= \frac{M}{G(I_x + I_y)} \left[ 1 + \frac{(I_x - I_y)^2}{4 I_x I_y} (1 - \operatorname{ch} \beta z + \operatorname{th} \beta L \operatorname{sh} \beta z) \right] \\ &= \frac{M}{G(I_x + I_y)} \left[ \frac{(I_x + I_y)^2}{4 I_x I_y} - \frac{(I_x - I_y)^2}{4 I_x I_y} (\operatorname{ch} \beta z - \operatorname{th} \beta L \operatorname{sh} \beta z) \right] \\ &= \frac{M}{G} \underbrace{\left[ \frac{I_x + I_y}{4 I_x I_y} \right]}_{\text{gauch.lib.}} - \underbrace{\frac{(I_x - I_y)^2}{4 (I_x + I_y) I_x I_y} (\operatorname{ch} \beta z - \operatorname{th} \beta L \operatorname{sh} \beta z)}_{\text{correction}} \end{aligned}$$

Enfin, l'angle  $\theta$  vaut

$$\theta = \frac{M}{G} \left[ \frac{I_x + I_y}{4I_x I_y} z - \frac{(I_x - I_y)^2}{4I_x I_y (I_x + I_y)} \frac{1}{\beta} (\operatorname{sh}\beta z - \operatorname{th}\beta L \operatorname{ch}\beta z + \operatorname{th}\beta L) \right]$$

En particulier,

$$\theta(L) = \frac{ML}{G} \left[ \frac{I_x + I_y}{4I_x I_y} - \frac{(I_x - I_y)^2}{4I_x I_y (I_x + I_y)} \frac{\operatorname{th}\beta L}{\beta L} \right]$$

On constate que la correction est sensiblement proportionnelle à  $\left(\frac{1}{\beta L}\right)$

Quel est l'ordre de grandeur de  $\beta$ ?

$$\beta^2 = \frac{4G}{E} \frac{\Omega}{I_x + I_y} = \frac{4G}{E} \frac{bh}{\frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}} = \frac{48G}{E} \frac{1}{b^2 + h^2}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{24}{1+\nu}} \frac{1}{d} \quad d = \text{diagonale de la section} = \sqrt{b^2 + h^2}$$

Pour  $\nu = 0,3$ ,

$$\beta = \frac{4,2}{d}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{(I_x - I_y)^2}{4I_x I_y (I_x + I_y)} &= \frac{I_x + I_y}{4I_x I_y} \frac{(I_x - I_y)^2}{(I_x + I_y)^2} = \frac{I_x + I_y}{4I_x I_y} \frac{(bh^3 - hb^3)^2}{(bh^3 \operatorname{sh}b^3)^2} \\ &= \frac{I_x + I_y}{4I_x I_y} \frac{(h^2 - b^2)^2}{(h^2 + b^2)^2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\theta(z) = \frac{M}{G} \frac{I_x + I_y}{I_x I_y} - \left\{ z - \sqrt{\frac{1+\nu}{24}} \frac{(h^2 - b^2)^2}{d^3} \left[ \operatorname{sh}\sqrt{\frac{24}{1+\nu}} \frac{z}{d} - \operatorname{th}\sqrt{\frac{24}{1+\nu}} \frac{L}{d} \left( \operatorname{ch} \frac{24}{1+\nu} \frac{z}{d} - 1 \right) \right] \right\}$$

$$\theta(L) = \frac{ML}{G} \frac{I_x + I_y}{I_x I_y} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1+\nu}{24}} \frac{(h^2 - b^2)^2}{d^4} \frac{d}{L} \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{1+\nu}{24}} \frac{L}{d} \right) \right]$$

## 5. TORSION DES SECTIONS MINCES OUVERTES



Les coordonnées sont mises sous la forme

$$x(s, n) = \bar{x}(s, n) - n \frac{d\bar{y}}{ds}$$

$$y(s, n) = \bar{y}(s, n) + n \frac{d\bar{x}}{ds}$$

On a alors

$$dx = \left( \frac{d\bar{x}}{ds} - n \frac{d^2\bar{y}}{ds^2} \right) ds = \frac{d\bar{y}}{ds} dn$$

$$dy = \left( \frac{d\bar{y}}{ds} + n \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} \right) ds + \frac{d\bar{x}}{ds} dn,$$

si bien que l'élément de volume vaut

$$dx \wedge dy = \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{ds} - n \frac{d^2\bar{y}}{ds^2} \right) ds - \frac{d\bar{y}}{ds} dn \right] \wedge \left[ \left( \frac{d\bar{y}}{ds} + n \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} \right) ds + \frac{d\bar{x}}{ds} dn \right]$$

où  $\wedge$  représente un opérateur de multiplication des différentielles dont les règles sont :

$$ds \wedge dn = - dn \wedge ds$$

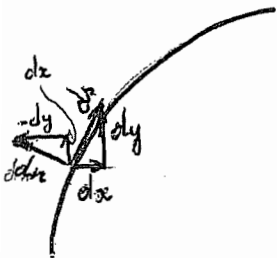
$$ds \wedge ds = 0$$

$$\alpha ds \wedge \beta dn = \alpha\beta ds \wedge dn$$

$$dn \wedge dn = 0$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{ds} \right)^2 - n \frac{d^2\bar{y}}{ds^2} \frac{d\bar{x}}{ds} + \left( \frac{d\bar{y}}{ds} \right)^2 + n \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} \frac{d\bar{y}}{ds} \right] ds \wedge dn \\ &= \left[ 1 + n \underbrace{\left( \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} \frac{d\bar{y}}{ds} - \frac{d^2\bar{y}}{ds^2} \frac{d\bar{x}}{ds} \right)}_{\text{courbure } \varrho} \right] ds \wedge dn \end{aligned}$$





Nous supposons dans la suite que l'épaisseur du profil est très faible devant son rayon de courbure. Les vecteurs de base  $\vec{e}_s$  et  $\vec{e}_n$  ont alors pour composantes

$$\vec{e}_s = \begin{bmatrix} \frac{d\bar{x}}{ds} \\ \frac{d\bar{y}}{ds} \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} -\frac{d\bar{y}}{ds} \\ \frac{d\bar{x}}{ds} \end{bmatrix}$$

Cela étant, les déplacements sont de la forme

$$u = -\theta(y - y_T) = -\theta(\bar{y} - y_T) - \theta_n \frac{d\bar{x}}{ds}$$

$$v = \theta(x - x_T) = \theta(\bar{x} - x_T) - \theta_n \frac{d\bar{y}}{ds}$$

$$w = w(s, n, z) : \text{inconnu}$$

Nous nous réservons la possibilité de choisir le centre de torsion  $(x_T, y_T)$ . On a alors

$$\begin{aligned} u_s &= u \frac{d\bar{x}}{ds} + v \frac{d\bar{y}}{ds} = \theta \left[ (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{y}}{ds} - (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right] - \theta_n \\ &= \theta(r_T - n) \end{aligned}$$

où la variable

$$r_T = (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{y}}{ds} - (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{x}}{ds}$$

n'est autre que la distance du centre de torsion à la tangente au feuillet moyen du profil. Dans la suite, nous utiliserons également la variable

$$r = \bar{x} \frac{d\bar{y}}{ds} - \bar{y} \frac{d\bar{x}}{ds},$$

liée à la première par la relation

$$r_T = r - x_T \frac{d\bar{y}}{ds} + y_T \frac{d\bar{x}}{ds}$$

Quant au déplacement normal au profil, il est donné par

$$u_n = -u \frac{d\bar{y}}{ds} + v \frac{d\bar{x}}{ds} = \theta \left[ (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{y}}{ds} + (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right]$$

Nous sommes à présent à même de calculer les déformations :

$$a) \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$b) \quad \gamma_{sz} = \frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial s} + \theta' (r_T - n)$$

$$c) \quad \gamma_{nz} = \frac{\partial u_n}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} + \theta' \left[ (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{y}}{ds} + (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right]$$

$$= \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{1}{2} \theta' \frac{d}{ds} \left[ (\bar{y} - y_T)^2 + (\bar{x} - x_T)^2 \right]$$

Dans le cas d'un profil mince, on simplifie nettement le problème en faisant l'hypothèse de Kirchhoff :

$$\gamma_{nz} = \frac{\partial w}{\partial n} + \theta' \left[ (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{y}}{ds} + (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right] = 0 ,$$

ce qui entraîne

$$w(s, n) = \bar{w}(s) - n \theta' \left[ (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{y}}{ds} + (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right]$$

Il vient alors

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} - n \theta' ,$$

si bien que

$$\gamma_{sz} = \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + \theta' r_T \right) - 2 \theta' n$$

5.1. Considérons d'abord le cas de la torsion uniforme ( $\sigma_z = 0$ ). Le principe variationnel correspondant s'écrit (poutre console)

$$\frac{G}{2} \int_0^L dz \int_0^{\ell} \left[ h \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + \theta' r_T \right)^2 + 4 \theta'^2 \frac{h^3}{12} \right] ds - M\theta(L) \quad \text{min.}$$

Visiblement, le champ  $w$  optimum est celui qui annule

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + \theta' r_T ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial s} = - \theta' r_T = - \theta' r + \theta' x_T \frac{d\bar{y}}{ds} - \theta' y_T \frac{d\bar{x}}{ds}$$

Posant

$$\psi(s) = \int_0^s r(\xi) d\xi ,$$

on obtient

$$\bar{w} = - \theta' \psi + \theta' x_T \bar{y} - \theta' y_T \bar{x} + \bar{w}_0 ,$$

d'où

$$\begin{aligned} w &= - \theta' \left[ \psi - x_T \bar{y} + y_T \bar{x} + n(\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{y}}{ds} + n(\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right] - \bar{w} . \\ &= - \theta' \left[ \psi + \frac{1}{2} n \frac{d}{ds} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \right] + x_T \theta' \left( \bar{y} + n \frac{d\bar{x}}{ds} \right) \\ &\quad - y_T \theta' \left( \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) + \bar{w}_0 \end{aligned}$$

On choisit alors  $\bar{w}_0$ ,  $x_T$ ,  $y_T$  de façon à assurer le découplage de la torsion vis-à-vis de l'extension et la flexion, soit

$$\int_{\Omega} w d\Omega = 0 , \quad \int_{\Omega} w x d\Omega = 0 , \quad \int_{\Omega} w y d\Omega = 0 .$$

On obtient ainsi, en prenant le centre de gravité pour origine et en se plaçant dans les axes principaux :

$$a) \bar{w}_0 h l = \theta' \left[ \int_0^l \psi h ds \right] \rightarrow \bar{w}_0 = \theta' \frac{\int_0^l \psi h ds}{h l}$$

$$b) \int_{\Omega} \left[ \psi + \frac{1}{2} n \frac{d}{ds} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \right] (\bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds}) d\Omega - y_T I_x = 0$$

$$y_T I_x = \int_0^l \psi \bar{x} h ds - \int_0^l \left[ \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} \frac{d\bar{y}}{ds} + \bar{y} \left( \frac{d\bar{y}}{ds} \right)^2 \right] \frac{h^3}{12} ds \approx \int_0^l \psi \bar{x} h ds$$

$$y_T \approx \frac{1}{I_x} \int_0^l \psi \bar{x} h ds$$

$$c) \int_{\Omega} \left[ \psi + n \left( \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \right] \left[ \bar{y} + n \frac{d\bar{x}}{ds} \right] d\Omega + x_T I_y = 0$$

$$x_T I_y + \int_0^l \psi \bar{y} h ds + \int_0^l \left[ \bar{x} \left( \frac{d\bar{x}}{ds} \right)^2 + \bar{y} \frac{d\bar{x}}{ds} \frac{d\bar{y}}{ds} \right] \frac{h^3}{12} ds = 0,$$

ce qui entraîne

$$x_T \approx - \frac{1}{I_y} \int_0^l \psi \bar{y} h ds .$$

Les coordonnées  $(x_T, y_T)$  définissent le centre de torsion. La raideur est alors donnée par application du principe

$$\frac{G}{2} \left( \int_0^L dz \int_0^l \frac{1}{3} h^3 ds \right) \theta'^2 - M\theta(L) \quad \min :$$

$$M = G J \theta',$$

avec

$$J = \frac{1}{3} \int_b h^3 ds .$$

## 5.2. Torsion non uniforme

Pour traiter le plus simplement possible le cas de la torsion non uniforme, nous ferons les hypothèses suivantes :

$$\cdot \sigma_z = \sigma_z(s, z),$$

c'est-à-dire que les tensions longitudinales ne varient pas selon l'épaisseur. Cette hypothèse est d'autant plus valable que l'épaisseur est faible

$$\cdot \bar{w}(s) = k W(s)$$

où  $W(s)$  est le gauchissement de la torsion uniforme pour  $\theta' = 1$ . Pour la dépendance de  $w$  vis-à-vis de la normale, on maintiendra l'hypothèse

$$\cdot \gamma_{nz} = 0,$$

soit

$$\frac{\partial w}{\partial n} + \theta' \left[ (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{y}}{ds} + (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right] = 0,$$

ce qui entraîne

$$w(s, n, z) = k(z) W(s) - n \theta' \left[ (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{y}}{ds} + (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right].$$

Enfin, on pose

$$\cdot \sigma_n = 0$$

$$\cdot \varepsilon_{ss} = 0$$

$$\cdot \gamma_{sn} = 0$$

Les hypothèses ci-dessus portent aussi bien sur les tensions que sur les déplacements: nous utiliserons donc le principe de HELLINGER-REISSNER. Mais auparavant, il convient de calculer les déformations :

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = k' W - n \theta'' \left[ (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{y}}{ds} + (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right]$$

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} &= \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z} = k \frac{dW}{ds} - \frac{1}{2} n \theta' \frac{d^2}{ds^2} \left[ (\bar{y} - y_T)^2 + (\bar{x} - x_T)^2 \right] + \frac{\partial u_s}{\partial z} \\ &= k \frac{dW}{ds} + \theta' n + \theta' (r_T - n) = k \frac{dW}{ds} + \theta' (r_T - 2n) , \end{aligned}$$

en négligeant les termes de courbure. Le principe de HELLINGER-REISSNER s'écrit alors (poutre console):

$$\begin{aligned} \int_0^l dz \int_b ds \int_{-h/2}^{h/2} \{ \sigma_z \left[ k' W - n \theta'' \left( (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{y}}{ds} + (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right) \right] \\ + \tau_{sz} \left[ k \frac{dW}{ds} + \theta' (r_T - 2n) \right] \\ - \frac{\sigma_z^2}{2E} - \frac{\tau_{sz}^2}{2G} \} dn - \int_0^l m \theta ds - \bar{M} \theta (l) \text{ stat.} \end{aligned}$$

D'emblée, on constate que pour  $\sigma_z$  ne dépendant que de  $s$  et  $z$ , le terme

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z n \theta'' \left( (\bar{y} - y_T) \frac{d\bar{y}}{ds} + (\bar{x} - x_T) \frac{d\bar{x}}{ds} \right) dz$$

est nul. On peut alors éliminer  $\sigma_z$  et  $\tau_{sz}$  :

$$\delta \sigma_z (s, z) \left[ \int_{-h/2}^{h/2} k' W dn - \frac{\sigma_z}{E} \int_{-h/2}^{h/2} dn \right] = 0 ,$$

$$\text{soit } k k' W = \frac{\sigma_z}{E} h \Rightarrow \sigma_z = E k' W .$$

$$\delta_{sz} (s, z, n) k \frac{dW}{ds} + \theta' (r_T - 2n) - \frac{\tau_{sz}}{G} = 0$$

soit

$$\tau_{sz} = G \left[ k \frac{dW}{ds} + \theta' (r_T - 2n) \right],$$

ce qui conduit au principe

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} dz \int_b ds \int_{-h/2}^{h/2} \{ E k'^2 W^2 + G (k \frac{dW}{ds} + \theta' r_T - 2\theta' n)^2 \} dn$$

$$- \int_0^{\ell} m\theta ds - \bar{M}\theta(\ell) \quad \min$$

Si l'on note que

$$\int_{-h/2}^{h/2} dn = h,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} ndn = 0$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} n^2 dn = \frac{h^3}{12},$$

on obtient aisément l'expression

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[ EC_1 k'^2 + G J \theta'^2 + G I_T (\theta' - k)^2 \right] dz - \int_0^{\ell} m\theta dz - \bar{M}\theta(\ell),$$

avec

$$C_1 = \int_b h W^2 ds$$

$$J = \frac{1}{3} \int_b h^3 ds$$

$$I_T = \int_b r_T^2 ds = \int_b \left( \frac{dW}{ds} \right)^2 ds = - \int_b r_T \frac{dW}{ds} ds,$$

puisque

$$\frac{dW}{ds} = -r_T ,$$

par construction de W .

Cherchons les équations d'Euler par variation de k et  $\theta$  .

$$\begin{aligned} \delta k &\rightarrow \int_0^{\ell} \left[ E C_1 k' \delta k' + G I_T (k - \theta') \delta k \right] dz \\ &= \left[ E C_1 k' \delta k \right]_0^{\ell} + \int_0^{\ell} (-E C_1 k'' + G I_T (k - \theta')) \delta k dz = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$k(0) = 0 \tag{1}$$

$$k'(\ell) = 0 \tag{2}$$

$$E C_1 k'' + G I_T (\theta' - k) = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \delta \theta &\rightarrow \int_0^{\ell} (G J \theta' \delta \theta' + G I_T (\theta' - k) \delta \theta') dz - \int_0^{\ell} m \delta \theta dz - \bar{M} \delta \theta(\ell) = \\ &\left[ (G J \theta' + G I_T (\theta' - k)) \delta \theta \right]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} (G J \theta' + G I_T (\theta' - k))' \delta \theta - \int_0^{\ell} m \delta \theta \\ &\quad - \bar{M} \delta \theta(\ell) , \end{aligned}$$

ce qui conduit au système

$$\theta(0) = 0 \tag{4}$$

$$G J \theta' + G I_T (\theta' - k) - \bar{M} = 0 \quad \text{en } z = \ell \tag{5}$$

$$(G J \theta' + G I_T (\theta' - k))' + m = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \tag{6}$$



### 5.3. Forme générale de la solution

Définissons d'abord le moment

$$M = \bar{M} - \int_z^{\ell} m \, d\zeta .$$

Les équations (5) et (6) se combinent alors pour donner

$$G J \theta' + G I_T (\theta' - k) = M,$$

d'où l'on déduit

$$G(I_T + J) \theta' = M + G I_T k$$

$$\theta' = \frac{M}{G(I_T + J)} + \frac{k}{1 + \frac{J}{I_T}} = \frac{M}{G I_T (1 + \frac{J}{I_T})} + \frac{k}{1 + \frac{J}{I_T}} \quad (7)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \theta' - k &= \frac{M}{G I_T (1 + \frac{J}{I_T})} + k \left[ \frac{1}{1 + \frac{J}{I_T}} - 1 \right] \\ &= \frac{M}{G I_T (1 + \frac{J}{I_T})} - k \frac{\frac{J}{I_T}}{1 + \frac{J}{I_T}} \end{aligned}$$

L'équation (3) donne alors

$$E C_1 k'' + \frac{M}{1 + \frac{J}{I_T}} - k \frac{G J}{1 + \frac{J}{I_T}} = 0,$$

soit

$$E C_1 k'' - \frac{G J}{1 + \frac{J}{I_T}} k = - \frac{M}{1 + \frac{J}{I_T}} ,$$

ou encore

$$k'' - \frac{GJ}{EC_1 \left(1 + \frac{J}{I_T}\right)} k = - \frac{M}{EC_1 \left(1 + \frac{J}{I_T}\right)}$$

Posons alors

$$\beta^2 = \frac{GJ}{EC_1 \left(1 + \frac{J}{I_T}\right)} \quad \mu = \frac{M}{EC_1 \left(1 + \frac{J}{I_T}\right)}$$

Il vient

$$k'' - \beta^2 k = - \mu(z)$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$k_0 = A \operatorname{ch} \beta z + B \operatorname{sh} \beta z.$$

Limitons-nous, pour simplifier, au cas  $M = \text{cte}$  (moment d'extrémité)  
Une solution particulière est

$$k_1 = + \frac{\mu}{\beta^2}$$

On a donc

$$k = A \operatorname{ch} \beta z + B \operatorname{sh} \beta z + \frac{\mu}{\beta^2}$$

Les conditions aux limites sont

$$k(0) = 0 \rightarrow A = - \frac{\mu}{\beta^2}$$

$$k'(l) = 0 \rightarrow \beta A \operatorname{sh} \beta l + \beta B \operatorname{ch} \beta l = 0,$$

$$\text{soit } B = -A \operatorname{th} \beta l.$$

On obtient ainsi

$$k = \frac{\mu}{\beta^2} [1 + \operatorname{ch} \beta z + \operatorname{th} \beta \ell \operatorname{sh} \beta z] = \frac{M}{GJ} [1 - \operatorname{ch} \beta z + \operatorname{th} \beta \ell \operatorname{sh} \beta z]$$

Il reste à calculer  $\theta$ , ce qui se fait aisément à partir de (7) :

$$\theta' = \frac{M}{GI_T (1 + \frac{J}{I_T})} + \frac{k}{1 + \frac{J}{I_T}} = \frac{1}{1 + \frac{J}{I_T}} \left[ \frac{M}{GI_T} + \frac{M}{GJ} (1 - \operatorname{ch} \beta z + \operatorname{th} \beta \ell \operatorname{sh} \beta z) \right]$$

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{M}{GJ (1 + \frac{J}{I_T})} \left[ \frac{J}{I_T} + 1 - \operatorname{ch} \beta z + \operatorname{th} \beta \ell \operatorname{sh} \beta z \right] \\ &= \frac{M}{GJ} \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{J}{I_T}} (\operatorname{ch} \beta z - \operatorname{th} \beta \ell \operatorname{sh} \beta z) \right] \end{aligned}$$

Il vient alors, en tenant compte du fait que  $\theta(0) = 0$

$$\theta(z) = \int_0^z \theta' d\zeta = \frac{M}{GJ} \left[ z - \frac{1}{\beta (1 + \frac{J}{I_T})} (\operatorname{sh} \beta z - \operatorname{th} \beta \ell (\operatorname{ch} \beta z - 1)) \right]$$

Le premier terme correspond à la solution à gauchissement libre; le deuxième est la correction due au gauchissement.

#### 5.4. Théorie de WAGNER

Si le profil est suffisamment mince, on a

$$J \ll I_T$$

Dès lors, la raideur associée au terme  $(k - \theta')$  est très grande vis-à-vis de la raideur en torsion, ce qui suggère d'écrire a priori :

$$k = \theta'$$

L'équation (7) donnant

$$\theta' = \frac{M}{GI_T(1+\frac{J}{I_T})} + \frac{k}{1+\frac{J}{I_T}} \approx \frac{M}{GI_T} + k$$

on constate que cette approximation revient en outre à négliger le terme de COULOMB  $M/GI_T$ .

Notre principe variationnel devient alors

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} [EC_1 \theta''^2 + GJ \theta'^2] dz - \int_0^{\ell} m \theta dz - \bar{M} \theta(\ell) \quad \min$$

A l'encastrement, la condition de nullité du gauchissement s'écrit

$$\theta' = 0$$

si bien que l'on obtient, par variation de  $\theta$ :

$$\int_0^{\ell} [EC_1 \theta'' \delta \theta'' + GJ \theta' \delta \theta'] dz - \int_0^{\ell} m \delta \theta dz - \bar{M} \delta \theta(\ell) = 0.$$

Intégrant deux fois par parties, on obtient successivement

$$[EC_1 \theta'' \delta \theta']_0^{\ell} + \int_0^{\ell} [-EC_1 \theta''' \delta \theta' + GJ \theta' \delta \theta'] dz - \int_0^{\ell} m \delta \theta dz - \bar{M} \delta \theta(\ell) = 0$$

$$[EC_1 \theta'' \delta \theta']_0^{\ell} - [(EC_1 \theta''' - GJ \theta') \delta \theta]_0^{\ell} + \int_0^{\ell} (EC_1 \theta'' - GJ \theta') \delta \theta dz - \int_0^{\ell} m \delta \theta dz - \bar{M} \delta \theta(\ell) = 0,$$

ce qui conduit au problème aux limites

$$\theta(0) = 0 \quad (8)$$

$$\theta'(0) = 0 \quad (9)$$

$$GJ \theta' - EC_1 \theta''' = \bar{M} \quad \text{en } z = \ell \quad (10)$$

$$EC_1 \theta'' = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (11)$$

$$GJ \theta'' - EC_1 \theta^{IV} + m = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \quad (12)$$

A nouveau, (10) et (12) se recombinent en

$$GJ\theta' - EC_1\theta''' = M \quad \text{dans } ]0, \ell[ , \quad (13)$$

M ayant la même définition que ci-dessus. Cette équation s'écrit encore

$$\theta''' - \frac{GJ}{EC_1}\theta' = -\frac{M}{EC_1}$$

soit

$$\theta''' - \beta_0^2 \theta' = -\mu_0$$

où

$$\beta_0 = \lim_{\frac{J}{I_T} \rightarrow 0} \beta = \sqrt{\frac{GJ}{EC_1}} \quad \mu_0 = \lim_{\frac{J}{I_T} \rightarrow 0} \mu = \frac{M}{EC_1}$$

L'équation caractéristique de cette solution est

$$z^3 - \beta_0^2 z = 0$$

Elle a les racines

$$z = 0 , \quad z = \pm \beta_0$$

Par conséquent, la solution générale est

$$\theta = A + B \operatorname{ch} \beta_0 z + C \operatorname{sh} \beta_0 z + \frac{\mu_0}{\beta_0^2} z$$

Les conditions  $\theta(0) = 0$  et  $\theta'(0) = 0$  entraînent respectivement

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$$

$$\beta_0 C + \frac{\mu_0}{\beta_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{\mu_0}{\beta_0^3} .$$

Enfin, la condition d'extrémité s'écrit

$$\beta_0^2 B \operatorname{ch} \beta_0 \ell + \beta_0^2 C \operatorname{sh} \beta_0 \ell = 0,$$

soit

$$B = -C \operatorname{th} \beta_0 \ell = \frac{\mu_0}{\beta_0^3} \operatorname{th} \beta_0 \ell$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\mu_0}{\beta_0^2} \left[ z - \frac{1}{\beta_0} (\operatorname{sh} \beta_0 z - \operatorname{th} \beta_0 \ell (\operatorname{ch} \beta_0 z - 1)) \right] \\ &= \frac{M}{GJ} \left[ z - \frac{1}{\beta_0} (\operatorname{sh} \beta_0 z - \operatorname{th} \beta_0 \ell (\operatorname{ch} \beta_0 z - 1)) \right]. \end{aligned}$$

### 5.5. Solution asymptotique loin de l'encastrement

Pour  $\xi \geq 3$ , on a

$$0,995 \leq \operatorname{th} \xi \leq 1.$$

Nous dirons qu'une poutre est longue si  $\beta \ell \geq 3$ . Dans ce cas, on peut écrire sans grande erreur

$$\operatorname{sh} \beta z - \operatorname{th} \beta \ell \operatorname{ch} \beta z \approx \operatorname{sh} \beta z - \operatorname{ch} \beta z = -e^{-\beta z},$$

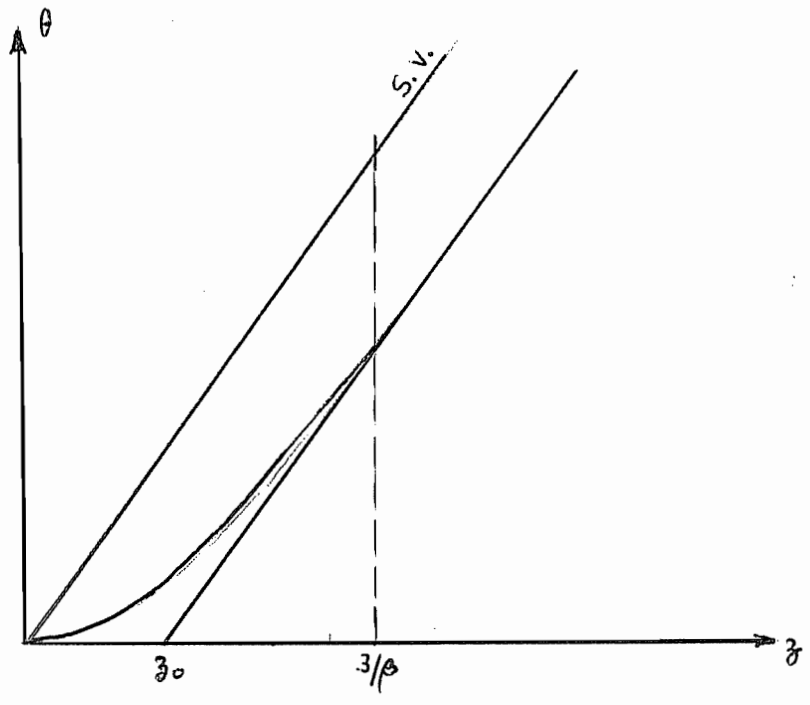
si bien que

$$\theta \approx \left. \begin{aligned} &\frac{M}{GJ} \left[ z - \frac{1}{\beta \left(1 + \frac{J}{I_T}\right)} (1 - e^{-\beta z}) \right] \\ &\frac{M}{GJ} \left[ z - \frac{1}{\beta_0} (1 - e^{-\beta_0 z}) \right] \end{aligned} \right\} \text{selon la théorie adoptée}$$

Pour  $\left\{ \frac{\beta z}{\beta_0} \right\} \geq 3$ , on a en outre

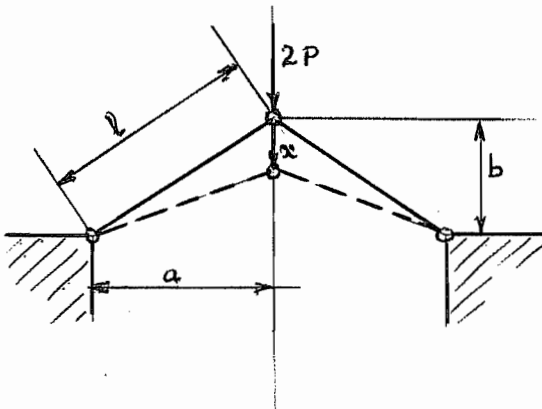
$$\theta \approx \frac{M}{GJ} (z - z_0), \quad z_0 = \begin{cases} \frac{1}{\beta \left(1 + \frac{J}{I_T}\right)} \\ \frac{1}{\beta_0} \end{cases}$$

En d'autres termes, loin de l'encastrement, tout se passe comme si l'on avait un encastrement à gauchissement libre en z.



## V. PROBLEMES NON LINEAIRES

1. Etudier la réponse d'un système composé de deux barres symétriques obliques, et chargées à leur noeud de fonction, par une charge verticale 2P, en tenant compte de la grandeur des rotations.



Etant donné la symétrie du système, on peut se limiter à étudier une seule des deux barres. La longueur initiale de la barre est donnée par

$$l^2 = a^2 + b^2,$$

et sa longueur après déformation, par

$$l'^2 = a^2 + (b-x)^2$$

Dès lors, la mesure de GREEN de la déformation est

$$g = \frac{l'^2 - l^2}{2l^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2bx + x^2 - a^2 - b^2}{2l^2} = \frac{1}{l^2} \left(-bx + \frac{x^2}{2}\right).$$

L'énergie de déformation s'écrit donc

$$U = \frac{1}{2} E\Omega \ell \frac{1}{4} \left(-bx + \frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{E\Omega}{\ell^3} \left(-bx + \frac{x^2}{2}\right)^2.$$

Quant à l'énergie potentielle de la force, elle vaut tout simplement  $(-Px)$  pour chaque barre (puisque chacune reprend la moitié de  $2P$ ).

Le principe de variation des déplacements s'écrit alors

$$\frac{1}{2} \frac{E\Omega}{\ell^3} \left(-bx + \frac{x^2}{2}\right) - Px \quad \text{stat} \\ x$$

Variant  $x$ , on obtient l'équation :



$$\frac{1}{2} \frac{E\Omega}{\ell^3} 2(-bx + \frac{x^2}{2})(x-b) - P = 0$$

soit

$$\pi = \frac{P\ell^3}{E\Omega} = \frac{1}{2} x (x-b)(x-2b)$$

a) On remarquera tout d'abord que cette fonction s'annule en  $x=0$ ,  $x=b$ ,  $x=2b$ . Pour l'étudier plus en détail, cherchons sa dérivée:

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{1}{2} [(x-b)(x-2b) + x(x-2b) + x(x-b)]$$

En particulier, pour  $x = 0$ , elle vaut

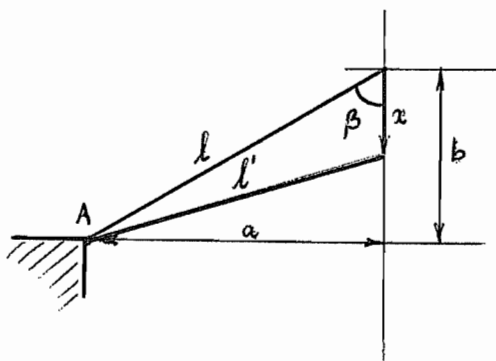
$$\left. \frac{d\pi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{2} 2 b^2 = b^2 .$$

Montrons que cette valeur est précisément celle qu'aurait fourni l'analyse linéaire, c'est-à-dire que

$$\pi_{\text{lin}} = b^2 x .$$

En effet, on a

$$\ell'^2 = \ell^2 + x^2 - 2\ell x \cos\beta = \ell^2(1 + \epsilon^2) = \ell^2 + 2\ell^2\epsilon + \ell^2\epsilon^2$$



d'où, en négligeant le second ordre en  $x$  et le second ordre en  $\epsilon$ ,

$$- 2\ell x \cos\beta = + 2\ell^2\epsilon ,$$

et

$$\epsilon = - x \cos\beta = - x \frac{b}{\ell}$$

Le principe linéarisé est donc

$$\frac{1}{2} E \Omega l \frac{b^2}{l^2} x^2 - P x \quad \min_x,$$

d'où

$$P = \frac{E \Omega b^2 x}{l^3} \quad ; \quad \pi = b^2 x$$

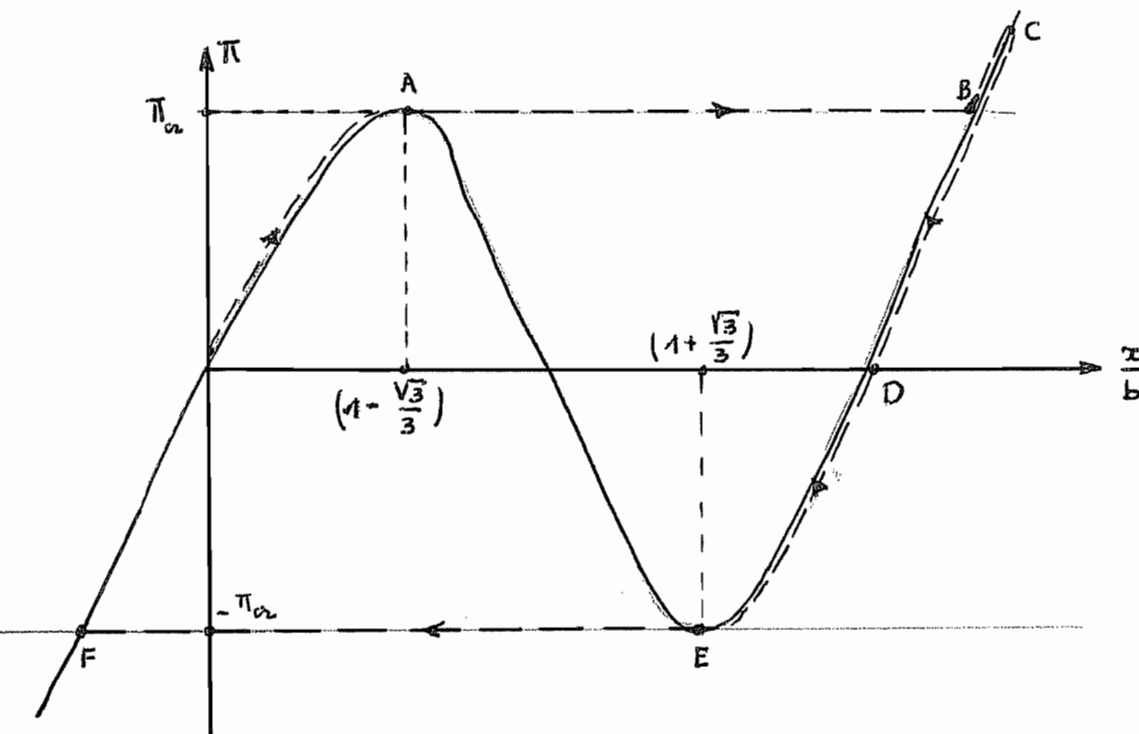
b) Etudions le signe de la dérivée de  $\pi$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dx} &= \frac{1}{2} [x^2 - 3bx + 2b^2 + x^2 - 2bx + x^2 - bx] \\ &= \frac{1}{2} [3x^2 - 6bx + 2b^2] \end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré a pour racines

$$x = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 6b^2}}{3} = b \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

A l'extérieur de ces racines, il est positif; à l'intérieur, il est négatif. On a donc le diagramme suivant :



Si l'on considère une mise en charge croissant progressivement, on constate que la progression du déplacement est non-linéaire, mais continue jusqu'au point A. Arrivé à ce point, les deux barres passent brutalement de l'autre côté du plan de référence, soit au point B. Ce phénomène est une instabilité, que l'on appelle en anglais snap-through, en allemand durchschlag, et que MASSONNET a baptisée claquage. Si l'on augmente encore la charge, la solution évolue jusqu'au point C. Supposons à présent que l'on supprime la charge: on passera au point D, qui se situe de l'autre côté du plan de référence que le point O. Il faut alors tirer sur les deux barres pour passer au point E, subir un nouveau claquage, mais en sens inverse, et se retrouver en F? Alors, en relâchant, on reviendra en O.

Calculons la charge critique : en introduisant la valeur  $\frac{x}{b} = (1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$  dans l'expression de  $\pi$ , on obtient aisément

$$\pi_{cr} = \frac{8}{9} \sqrt{3} b^3 \approx 1,52 b^3 .$$

On remarquera en particulier que pour  $b = 0$ , les points O, G et D sont confondus : on obtient simplement

$$\pi = \frac{1}{2} x^3$$

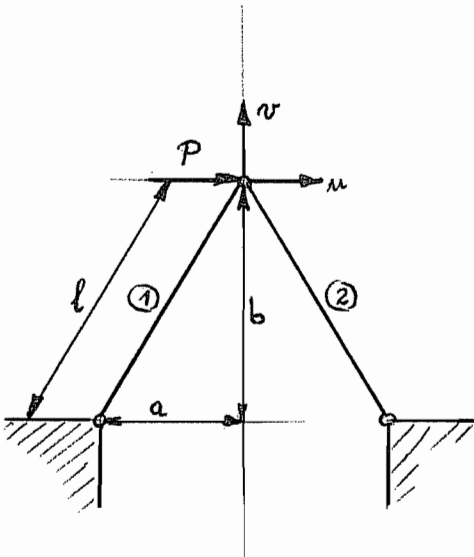
c'est-à-dire que l'énergie croît très lentement à l'origine. Ce fait correspond à la notion de treillis critique des études linéaires.

2. Etudier les mêmes deux barres, soumises cette fois à une charge horizontale

Les longueurs sont encore données par

$$l^2 = a^2 + b^2 ;$$

pour ce qui est des longueurs après déformation, il faut distinguer les deux barres



. barre 1:  $l'^2 = (a+u)^2 + (b+v)^2$ ,

$$g_1 = \frac{(a+u)^2 + (b+v)^2 - (a^2 + b^2)}{2l^2}$$

$$= \frac{1}{l^2} \left( au + bv + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right)$$

. barre 2:  $l'^2 = (a-u)^2 + (b-v)^2$

$$g_2 = \frac{1}{l^2} \left( -au + bv + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right)$$

L'énergie de déformation s'écrit donc

$$U = \frac{1}{2} \frac{E\Omega}{l^3} \left[ \left( au + bv + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right)^2 + \left( -au + bv + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right)^2 \right]$$

et, en tenant compte de l'identité

$$(\alpha + \beta)^2 + (-\alpha + \beta)^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 ,$$

$$U = \frac{E\Omega}{l^3} \left[ a^2 u^2 + \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + bv \right)^2 \right]$$

Quant à l'énergie potentielle des charges, elle s'écrit simplement  $(-Pu)$ . Le principe de variation des déplacements s'écrit alors

$$\delta(U - Pu) = 0,$$

ce qui donne :

$$\delta v : \frac{E\Omega}{\ell^3} \left[ 2 \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + bv \right) (v+b) \right] = 0,$$

d'où l'alternative :

$$v = -b \tag{1}$$

ou

$$\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + bv = 0, \text{ soit } v = -b \pm \sqrt{b^2 - v^2}$$

Dans ce dernier cas, seule la solution

$$v = -b + \sqrt{b^2 - v^2} \tag{2}$$

est admissible, sans quoi  $v \neq 0$  si  $u = 0$ .

$$\delta u : \frac{E\Omega}{\ell^3} \left[ 2a^2 u + 2 \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + bv \right) u \right] = P \tag{3}$$

Etant donné l'alternative signalée ci-dessus, la solution a deux branches :

$$(i) \quad v = -b + \sqrt{b^2 - v^2}$$

Alors, le second terme du crochet de (3) s'annule, d'où

$$P = 2 \frac{E\Omega}{\ell^3} a^2 u,$$

solution linéaire ! (Ce résultat est à tout le moins inattendu).  
On notera que pour  $u = b$ ,  $v = -b$ , ce qui signifie que les deux

$$P = 2 \frac{E\Omega}{\ell^3} a^2 b$$

(ii)  $v = -b$ . Cette solution n'a pas beaucoup de sens: elle correspond au fait que si l'on amène artificiellement les deux barres dans le prolongement l'une de l'autre, il existe une position

d'équilibre. Alors,

$$P = \frac{E\Omega}{\ell^3} \left[ 2a^2 u + 2 \left( \frac{u^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) u \right]$$

$$\frac{dP}{du} = \frac{E\Omega}{\ell^3} \left[ 2a^2 + 2 \left( \frac{u^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) + 2u^2 \right]$$

$$= \frac{E\Omega}{\ell^3} \left[ 3u^2 + 2a^2 - b^2 \right]$$

Cette dérivée est positive si  $u \geq \sqrt{\frac{b^2 - 2a^2}{3}}$

En particulier, pour  $b \leq a\sqrt{2}$ , cette solution est toujours stable. Considérons enfin le cas particulier  $b = 0$ , qui correspond aux deux barres dans le prolongement l'une de l'autre. On a alors les équations :

$$\delta v \rightarrow 2 \frac{E\Omega}{\ell^3} \left[ \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) v \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

$$\delta u \rightarrow \frac{E\Omega}{\ell^3} \left[ 2a^2 u + 2 \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) u \right] = P ,$$

d'où, comme  $\ell = a$ ,

$$P = \frac{E\Omega}{\ell^3} \left[ 2\ell^2 u + u^3 \right] ,$$

soit

$$\pi = \frac{P\ell^3}{E\Omega} = u^3 + 2\ell^2 u . \quad (4)$$

On a toujours  $\frac{d\pi}{du} > 0$ , ce qui exprime la stabilité. Ce résultat est lié au fait que les deux barres ont la même longueur.

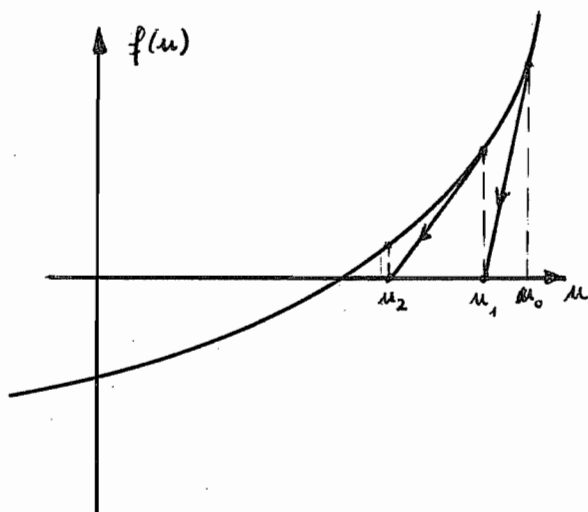
Il n'est peut-être pas inutile d'examiner comment trouver des approximations successives de la relation (4). Pour cela, on se base sur la méthode de NEWTON. Soit à trouver le zéro d'une fonction  $f(u)$ . Dans notre cas, on aura

$$f(u) = u^3 + 2\ell^2 u - \pi .$$

Soit alors  $u_0$  une approximation de ce zéro. La méthode de NEWTON consiste à prendre comme meilleure approximation le nombre

$$u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}$$

Rappelons que cette méthode revient à assimiler la courbe à sa tangente.



Comme le montre la figure ci-contre il s'agit donc de linéarisations successives.

Comme première approximation, nous poserons  $u_0 = 0$ , ce qui nous donnera pour  $u_1$  la solution linéarisée :  
comme

$$f'(u) = 3u^2 + 2\ell^2,$$

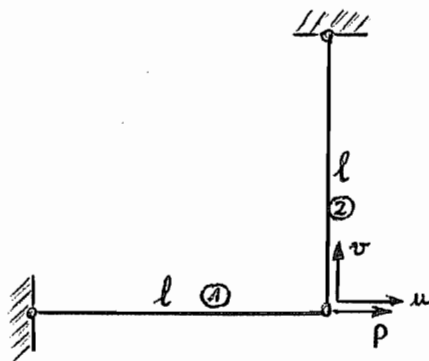
on a, pour  $u_0 = 0$ ,

$$u_1 = 0 + \frac{\pi}{2\ell^2} = \frac{P\ell}{2E\Omega}.$$

Repartant de  $u_1$ , on peut alors obtenir une première approximation non-linéaire :

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 - \frac{f(u_1)}{f'(u_1)} = \frac{\pi}{2\ell^2} - \frac{\frac{\pi^3}{8\ell^6} + 2\ell^2 \frac{\pi}{2\ell^2} - \pi}{3 \frac{\pi^2}{4\ell^4} + 2\ell^2} \\ &= \frac{\pi}{2\ell^2} \left[ 1 - \frac{\frac{\pi^2}{4\ell^4}}{2\ell^2 + 3 \frac{\pi^2}{4\ell^4}} \right] \\ &= \frac{P\ell}{2E\Omega} \left[ 1 - \frac{\left(\frac{P\ell}{2E\Omega}\right)^2}{2\ell^2 + 3 \left(\frac{P\ell}{2E\Omega}\right)^2} \right] \approx \frac{P\ell}{2E\Omega} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{P}{E\Omega}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

3. Etudier le comportement de deux barres orthogonales de même longueur, soumises à une charge P dans le prolongement de l'une d'elles.



Les longueurs après déformations sont respectivement :

$$\text{barre 1: } l'_1{}^2 = (l+u)^2 + v^2$$

$$\text{barre 2: } l'_2{}^2 = (l-v)^2 + u^2 ,$$

ce qui conduit aux valeurs suivantes d'allongements de GREEN :

$$\varepsilon_1 = \frac{l u + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2}}{l^2} , \quad \varepsilon_2 = \frac{-l v + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2}}{l^2}$$

Par conséquent, si les deux barres ont un module élastique E , l'énergie de déformation vaut

$$U = \frac{1}{2} \frac{E\Omega}{l^3} \left[ \left( l u + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right)^2 + \left( -l v + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right)^2 \right] ,$$

tandis que l'énergie de la charge P est donnée par  $(-Pu)$  . Les équations d'équilibre s'obtiennent par variation de u et v :

$$\delta u \rightarrow \frac{E\Omega}{l^3} \left[ \left( l u + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) (u+l) + \left( -l v + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) u \right] = P$$

$$\delta v \rightarrow \frac{E\Omega}{l^3} \left[ \left( l u + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) v + \left( -l v + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) (v-l) \right] = 0$$

Posant

$$\varepsilon = \frac{P}{E\Omega} , \quad x = \frac{u}{l} , \quad y = \frac{v}{l} ,$$

on peut encore écrire ces équations sous la forme

$$\begin{cases} x^3 + 3 \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} - xy + \frac{xy^2}{2} + x + \frac{y^2}{2} = \varepsilon \\ x^2 y + y^3 + xy - \frac{3}{2} y^2 + y - \frac{1}{2} x^2 = 0 \end{cases}$$



On constate que, déjà pour un problème aussi simple, les équations sont très compliquées. Pour les résoudre, il faut utiliser une méthode d'approximations successives. Nous utiliserons la méthode de NEWTON-RAPHSON, qui généralise celle de NEWTON au cas de plusieurs variables: on pose

$$\vec{f}(x,y) = \begin{bmatrix} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{x^2 y}{2} - xy + \frac{xy^2}{2} + x + \frac{y^2}{2} - \epsilon \\ x^2 y + y^3 + xy - \frac{3}{2} y^2 + y - \frac{1}{2} x^2 \end{bmatrix}$$

La solution est caractérisée par  $\vec{f} = 0$ . Soit donc  $(x_0, y_0)$  une approximation de la solution. On a

$$\vec{f}(x,y) \approx \vec{f}(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta x + \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta y$$

où

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

ce qui donne, pour  $\vec{f}(x,y) = 0$ , le système linéaire

$$A(x_0, y_0) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \vec{f}(x_0, y_0)$$

où l'on introduit la matrice

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \end{bmatrix} .$$

Proposons-nous par exemple d'apporter une première correction à la solution linéaire qui est donnée par

$$x_0 = \epsilon, \quad y_0 = 0,$$

comme on s'en convainc facilement. On a donc

$$\begin{aligned} \vec{f}(x_0, y_0) &= \begin{bmatrix} \epsilon^3 + \frac{3}{2} \epsilon^2 \\ -\frac{1}{2} \epsilon^2 \end{bmatrix} \\ A(x, y) &= \begin{bmatrix} 3x^2 + 3x + xy - y + \frac{y^2}{2} + 1 & \frac{x^2}{2} - x + xy + y \\ 2xy + y - x & x^2 + 3y^2 + x - 3y + 1 \end{bmatrix} \\ A(x_0, y_0) &= \begin{bmatrix} 3\epsilon^2 + 3\epsilon + 1 & \frac{\epsilon^2}{2} - \epsilon \\ -\epsilon & \epsilon^2 + \epsilon + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \frac{1}{(1+3\epsilon+\epsilon^2)(1+\epsilon+\epsilon^2)+\epsilon^2(1-\frac{\epsilon}{2})} \begin{bmatrix} 1+\epsilon+\epsilon^2 & \epsilon+\frac{\epsilon^2}{2} \\ \epsilon & 1+3\epsilon+3\epsilon^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^3 + \frac{3}{2}\epsilon^2 \\ -\frac{1}{2}\epsilon^2 \end{bmatrix}$$

et, en négligeant  $\epsilon$  devant 1 ,

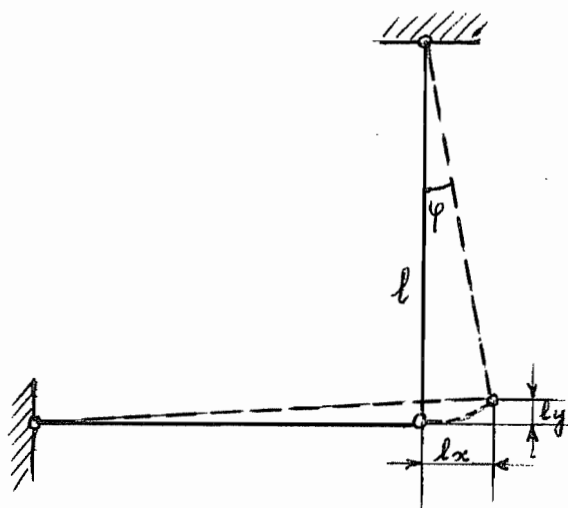
$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \epsilon^2 \\ -\frac{1}{2} \epsilon^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \epsilon^2 \\ \frac{1}{2} \epsilon^2 \end{bmatrix}$$

Ceci permet de calculer approximativement le soulèvement du noeud :

$$y \approx \frac{1}{2} \epsilon^2 ,$$

tandis que l'on peut garder l'expression approchée.

$$x \approx \epsilon$$



Cette solution correspond au fait que pour les faibles charges, la barre 2 ne s'allonge pas: la barre 1 prend un allongement  $lx$ , et cela entraîne un angle  $\phi$  donné par  $\phi \approx x$ . Dès lors, la barre 2 se soulève de

$$ly = l(1 - \cos \phi) \approx l \frac{\phi^2}{2} = l \frac{x^2}{2} .$$

## VI. STABILITE LINEAIRE

### Introduction

Le terme "stabilité linéaire" est en soi impropre, puisque les phénomènes d'instabilité sont par essence non linéaires. On appelle cependant stabilité linéaire le cas où l'état d'équilibre dont on teste la stabilité peut être décrit à partir de la théorie linéaire de l'élasticité, c'est-à-dire si

$$[D_i u_j^0] \ll 1 ,$$

$u_i^0$  représentant l'état d'équilibre.

Cela étant, on se donne une forme de sollicitation, définie par des tensions  $s_{ij}^0$ , et on cherche la charge critique par le problème aux valeurs propres

$$\int_V C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dV + \lambda \int_V s_{ij}^0 D_i u_m D_j u_m dV \quad \text{stat}_u$$

La plus petite valeur propre  $\lambda$  est la première charge critique généralisée : c'est le coefficient multipliant de  $s_{ij}^0$ , ou de la charge correspondante, à l'instabilité.

Les expressions apparaissant dans la deuxième intégrale sont souvent compliquées. Aussi, on peut les simplifier comme suit : on pose d'abord

$$D_i u_j = \epsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad , \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j - D_j u_i) \quad ,$$

ce qui permet de réécrire la dite intégrale de la manière suivante :

$$\int_V s_{ij}^0 D_i u_m D_j u_m dV = \int_V s_{ik}^0 D_i u_j D_k u_l \delta_{jl} dV =$$

$$\int_V s_{ik}^0 \delta_{jl} (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) (\epsilon_{kl} + \omega_{kl}) dV$$

$$= \int_V s_{ik}^0 \delta_{jl} (\epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \omega_{ij} \epsilon_{kl} + \epsilon_{ij} \omega_{kl} + \omega_{ij} \omega_{kl}) dV.$$

La deuxième étape consiste à noter qu'au point stationnaire, on doit avoir l'équilibre des énergies :

$$\int_V C_{ijkl} \epsilon_{ij} dV = \int_V \lambda s_{ij}^0 D_i u_m dV,$$

comme on s'en rend compte en posant  $\delta u_i = u_i$ . Or, si le matériau est raide, des valeurs raisonnables sont

$$C_{ijkl} = 10^4 \text{ hb} \quad \rightarrow \text{ordre de grandeur } [C]$$

$$\lambda s_{ij}^0 = 10 \text{ hb} \quad \rightarrow \text{ordre de grandeur } \alpha [C], \quad \alpha \ll 1$$

soit un rapport  $10^3$ . Dès lors, les  $\omega_{ij}$  doivent être beaucoup plus grands que les  $\epsilon_{ij}$ . En effet, si  $[\epsilon]$  et  $[\omega]$  sont les ordres de grandeur respectifs,

$$\int_V C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dV = O([C] \cdot [\epsilon]^2 \cdot \text{Volume})$$

$$\int_V \lambda s_{ik}^0 \delta_{jl} (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) (\epsilon_{kl} + \omega_{kl}) = O(\alpha [C] \cdot ([\epsilon] + [\omega])^2 \cdot \text{Volume}),$$

ce qui implique

$$[C] [\epsilon]^2 \approx \alpha [C] (\epsilon + \omega)^2$$

$$(\epsilon + \omega)^2 \approx \frac{[\epsilon]^2}{\alpha} \Rightarrow [\epsilon + \omega] \approx \frac{[\epsilon]}{\sqrt{\alpha}}$$

$$[\omega] \approx [\epsilon] \left[ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1 \right] \approx \frac{[\epsilon]}{\sqrt{\alpha}} \gg [\epsilon]$$

Cette constatation permet de dire que

$$[\varepsilon] [\omega] \ll [\omega]^2 \qquad [\varepsilon]^2 \ll [\omega]^2$$

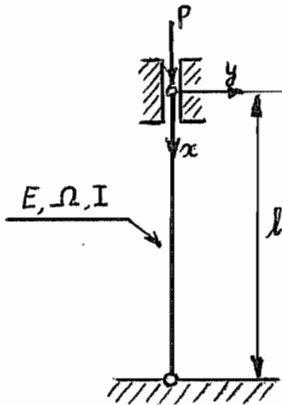
d'où la forme simplifiée du problème aux valeurs propres

$$\int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV + \lambda \int_V s_{ij} \omega_{im} \omega_{jm} dV \quad \text{stat ;}$$

avec

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j - D_j u_i)$$

1. Chercher la charge critique de flambement d'une poutre biappuyée soumise à une charge de bout, en négligeant la déformation due à l'effort tranchant



On fait les hypothèses simples

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -v' y \\ v = v(x) \end{array} \right\}, \text{ état uniaxial de tension,}$$

ce qui conduit aux relations

$$\varepsilon_{xx} = -v'' y$$

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v'$$

$$\omega_{xz} = 0$$

$$\omega_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xx} = -1/\Omega \quad (\text{charge unitaire})$$

Il vient donc, pour une charge P de bout,

$$\int_0^l EI v''^2 dx - P \int_0^l v'^2 dx \quad \text{stat} ,$$

d'où les équations

$$\begin{aligned} & \left[ EI v'' \delta v' \right]_0^l + \int_0^l (EI v'''' + P v') \delta v' dx = \\ & \left[ EI v'' \delta v' \right]_0^l - \left[ (EI v'''' + P v') \delta v \right]_0^l + \int_0^l (EI v^{IV} + P v'') \delta v dx. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont

$$. v(0) = v(l) = 0$$

$$. EI v''(0) = EI v''(l) = 0,$$

et l'équation d'EULER :

$$EI v^{IV} + P v'' = 0,$$

soit, en posant

$$\beta^2 = \frac{P}{EI} ,$$

$$v^{IV} + \beta^2 v'' = 0$$

La solution générale de cette équation est

$$v = A_0 + A_1 x + A_3 \cos \beta x + A_4 \sin \beta x .$$

Passons aux conditions aux limites :

$$v(0) = A_0 + A_3 = 0 \quad (1)$$

$$v(\ell) = A_0 + A_1 \ell + A_3 \cos \beta \ell + A_4 \sin \beta \ell = 0 \quad (2)$$

$$v''(0) = -\beta^2 A_3 = 0 \quad (3)$$

$$v''(\ell) = -\beta^2 (A_3 \cos \beta \ell + A_4 \sin \beta \ell) \quad (4)$$

L'équation (3) entraîne  $\beta = 0$  ou  $A_3 = 0$ . Or, si  $\beta = 0$ , on a pour seule solution, vu (1),  $v = A_1 x$ , ce qui contredit (2). On ne pourra donc espérer de solution non triviale que pour  $\beta \neq 0$ , ce qui implique par (3) et (1) :

$$A_0 = 0; A_3 = 0$$

La condition (4) entraîne alors

$$A_4 \sin \beta \ell = 0,$$

ce qui, réintroduit dans (2), donne  $A_1 = 0$ . Il reste donc deux possibilités  $A_4 = 0$ , ou  $\sin \beta \ell = 0$ . Visiblement, seule cette dernière solution est non triviale, d'où

$$\beta = \frac{n\pi}{\ell} \quad n \neq 0$$

pour les modes critiques. Le facteur  $A_4$  n'est pas déterminé comme c'est toujours le cas dans les problèmes aux valeurs propres linéaires. Cela étant, la définition de  $\beta$  fournit les charges critiques d'EULER:

$$P_E^{(n)} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{\ell^2},$$

qui correspond aux modes

$$v = A \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$



2. Même problème, en tenant compte de l'effet de l'effort tranchant

On pose à présent,

$$u_1 = \alpha y$$

$$u_2 = v ,$$

d'où

$$\epsilon_{11} = y \alpha'$$

$$\gamma_{12} = \alpha + v'$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} (D_1 u_2 - D_2 u_1) = \frac{1}{2} (v' - \alpha)$$

$$\sigma_{11}^0 = - \frac{1}{\Omega} \text{ (charge unitaire)}$$

Le problème de la stabilité linéaire s'écrit donc

$$\int_0^l (EI \alpha'^2 + G\Omega (\alpha + v')^2) dx - \frac{1}{4} P \int_0^l (v' - \alpha)^2 dx . \quad (1)$$

On pourrait le résoudre de la même manière que le précédent. Nous utiliserons plutôt la méthode de RAYLEIGH-RITZ: il s'agit de choisir des formes pour le déplacement, affectées de coefficients, et de chercher le point stationnaire en variant ceux-ci. La charge critique vaut alors

$$P = \frac{\int_0^l [EI \alpha'^2 + G\Omega (\alpha + v')^2] dx}{\frac{1}{4} \int_0^l (v' - \alpha)^2 dx}$$

Nous utiliserons les développements de FOURIER:

$$v = \sum_n V_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (\text{respecte les conditions } v(0) = v(l) = 0)$$

$$\alpha = A_0 + \sum_n A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_n B_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Il vient donc

$$v' = \sum_n \frac{n\pi}{l} V_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$\alpha' = - \sum_n \frac{n\pi}{l} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_n \frac{n\pi}{l} B_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Etant donné les relations

$$\int_0^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}$$

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0$$

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}$$

$$\int_0^l dx = l$$

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0$$

$$\int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0 ,$$

on obtient aisément la forme suivante pour (1) :

$$\begin{aligned} & \frac{\ell}{2} EI \left[ \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} A_n^2 + \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} B_n^2 \right] + \frac{\ell}{2} G\Omega \left[ 2 A_0^2 + \sum_n A_n^2 + \sum_n B_n^2 \right] \\ & + \ell G\Omega \left[ \sum_n \frac{n\pi}{\ell} A_n V_n \right] + \frac{\ell}{2} G\Omega \left[ \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} V_n^2 \right] \\ & - \frac{P\ell}{8} \left[ \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} V_n^2 \right] + \frac{P\ell}{4} \left[ \sum_n \frac{n\pi}{\ell} A_n V_n \right] - \frac{P\ell}{8} \left[ 2 A_0^2 + \sum_n A_n^2 + \sum_n B_n^2 \right] \end{aligned}$$

stat

 $A_0; A_n, B_n$ 

On remarquera le caractère découplé des modes de FOURIER. Ceci est lié à leur orthogonalité. Pour obtenir la solution, on varie les différentes constantes ce qui donne :

$$\delta A_0 : (G\Omega - \frac{P}{4}) \ell A_0 = 0 \quad (2)$$

$$\delta A_n : \ell EI \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} A_n + \ell G\Omega A_n + \ell G\Omega \frac{n\pi}{\ell} V_n + \ell \frac{P}{4} \frac{n\pi}{\ell} V_n - \ell \frac{P}{4} A_n = 0,$$

soit, en posant

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (\text{charge d'EULER})$$

$$A_n \left[ n^2 P_E + G\Omega - \frac{P}{4} \right] + \left[ G\Omega + \frac{P}{4} \right] \frac{n\pi}{\ell} V_n = 0 \quad (3)$$

$$\delta B_n \rightarrow B_n \left[ n^2 P_E + G\Omega - \frac{P}{4} \right] = 0 \quad (4)$$

$$\delta V_n \rightarrow \ell G\Omega \frac{n\pi}{\ell} A_n + \ell G\Omega \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} V_n - \ell \frac{P}{4} \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} V_n + \ell \frac{P}{4} \frac{n\pi}{\ell} A_n = 0,$$

soit encore :

$$\left[ G\Omega + \frac{P}{4} \right] A_n + \left[ G\Omega - \frac{P}{4} \right] \frac{n\pi}{\ell} V_n = 0 \quad (5)$$

Les équations (2) et (4) entraînent  $A_0 = 0$ ,  $B_n = 0$ , sauf pour des charges de l'ordre de  $4 G\Omega$ , ce qui est énorme, en général. Quant aux équation (3) et (5), elles sont compatibles si

$$(n^2 P_E + G\Omega - \frac{P}{4})(G\Omega - \frac{P}{4}) - (G\Omega + \frac{P}{4})^2 = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$(G\Omega - \frac{P}{4})^2 - (G\Omega + \frac{P}{4})^2 + n^2 P_E (G\Omega - \frac{P}{4}) = 0 ,$$

$$- \frac{P}{2} \cdot 2 G \Omega + n^2 P_E G\Omega - n^2 P_E \frac{P}{4} = 0 ,$$

$$P \left[ 1 + \frac{n^2 P_E}{4 G\Omega} \right] = n^2 P_E ,$$

soit finalement

$$P(n) = \frac{n^2 P_E}{1 + \frac{n^2 P_E}{4 G\Omega}}$$

Cette charge critique diffère peu de la charge d'EULER si  $P_E \ll G\Omega$ , ce qui a lieu si la poutre est élancée.

APPENDICE - NOTE SUR LE CALCUL DES VARIATIONS

1. La présente note a pour but de préciser certaines techniques qui reviennent constamment en calcul des variations. Pour mieux faire ressortir les idées, nous considérerons un problème très simple : il s'agit de minimiser la fonctionnelle

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2} \int_V k D_i \theta D_i \theta \, dV - \int_V Q \theta \, dV - \int_{S_2} \bar{q} \theta \, dS, \quad (1)$$

avec les conditions supplémentaires  $k > 0$  et

$$\theta = \bar{\theta} \text{ sur } S_1. \quad (2)$$

Dans ces expressions,  $V$  est un ensemble ouvert borné, de frontière  $S$ , et on impose les conditions suivantes pour que le problème soit bien posé :

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \phi, \quad S_1 \neq \phi \quad (3)$$

Ce problème représente par exemple l'écoulement stationnaire de la chaleur :  $\theta$  est alors la température,  $Q$ , une densité de sources internes, et  $q$ ; le flux de chaleur sortant par la partie  $S_2$  de la surface :

2. Sans entrer dans les détails, disons quelques mots des conditions pour que la fonctionnelle  $\Phi(\theta)$  ait du sens : il faut que les dérivées premières de  $\theta$  aient leur carré intégrable, ce que l'on écrit  $D_i \theta \in L^2$ . L'ensemble de toutes les fonctions qui sont, avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $m$ , de carré intégrable, est appelé espace de SOBOLEV d'ordre  $m$  et noté  $H^m(V)$ . Dans notre cas; la fonctionnelle existe si  $\theta \in H^1(V)$ . Nous n'insisterons pas sur les propriétés des espaces de SOBOLEV, bien qu'elles soient remarquables. Nous nous limiterons à citer le théorème des traces : toute fonction  $\theta \in H^m(V)$  a ses dérivées jusqu'à l'ordre  $(m-1)$  de carré sommable sur  $S$  :

$$\theta \in H^m(V) \Rightarrow \theta \in H^{m-1}(S) .$$

Ce résultat important suppose certaines conditions de régularité de la frontière, qui sont heureusement vérifiées dans les cas pratiques. Une frontière, qui sont heureusement vérifiées dans 1 les cas pratiques. Une conséquence de théorème est que la dernière intégrale de la fonctionnelle (1) est définie si  $\bar{q} \in L^2(S_2)$  .

Dans l'application d'un principe variationnel où interviennent les dérivées jusqu'à l'ordre  $m$ , il faut vérifier a priori les conditions aux limites portant sur les dérivées jusqu'à l'ordre  $(m-1)$  . Ces conditions sont dites essentiels.

Lorsqu'elles sont homogènes, l'ensemble des fonctions de  $H^m(V)$  qui les vérifient est linéaire. C'est l'espace des fonctions admissibles et nous le noterons  $U$ . Si elles ne sont pas homogènes, il faut considérer une fonction particulière  $\theta_0$  qui les vérifie, et travailler dans le translaté

$$\theta_0 + U = \{ \theta \mid \theta = \theta_0 + \theta_1, \theta_1 \in U \} , \quad (4)$$

de façon à respecter les conditions aux limites. Le cas homogène correspond alors à  $\theta_0 = 0$  .

3. On appelle point stationnaire de la fonctionnelle  $\Phi$  une fonction  $\theta \in \theta_0 + U$  telle que la variation première de  $\theta$  soit nulle:

$$(\forall \psi \in U) \int_V k D_i \theta D_i \psi dV - \int_V Q \psi dV - \int_{S_2} \bar{q} \psi dS = 0 \quad (5)$$

Si  $\theta$  est un point stationnaire, la fonctionnelle  $\Phi$  y est minimum : en effet, soit  $\psi$  une fonction de  $V$  :  $(\theta+\psi)$  vérifie toujours les conditions aux limites (2), et :

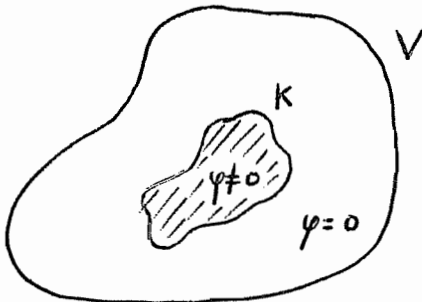
$$\begin{aligned}
\Phi(\theta+\psi) &= \frac{1}{2} \int_V k D_i(\theta+\psi) D_i(\theta+\psi) dV - \int_V Q(\theta+\psi) dV - \int_{S_2} \bar{q}(\theta+\psi) dS \\
&= \frac{1}{2} \int_V k D_i \theta D_i \theta dV - \int_V Q \theta dV - \int_{S_2} \bar{q} \theta dS \\
&\quad + \int_V k D_i \theta D_i \psi dV - \int_V Q \psi dV - \int_{S_2} \bar{q} \psi dS \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_V k D_i \psi D_i \psi dV
\end{aligned}$$

Etant donné la condition de stationnarité (5), on obtient

$$\Phi(\theta+\psi) = \Phi(\theta) + \frac{1}{2} \int_V k D_i \psi D_i \psi dV \geq \Phi(\theta),$$

puisque le deuxième terme du second membre est l'intégrale d'un carré. Le problème se réduit donc à déterminer les conditions de stationnarité.

4. Pour établir les conditions de stationnarité, nous utiliserons deux résultats de la théorie de l'intégration. Tout d'abord, on appelle  $D(V)$  l'ensemble des fonctions indéfiniment continûment dérivables, nulles hors d'un compact contenu dans  $V$  : si  $\phi \in D(V)$



il existe un compact  $K$  tel que  $\phi = 0$  dans  $V-K$ , et  $\phi \in C^\infty(V)$ , au passage de  $K$  à  $V-K$ ,  $\phi$  se raccorde à 0 "de manière infiniment douce". On appelle encore  $L^{1,loc}(V)$  l'ensemble des fonctions intégrables sur tout compact de  $V$ . Disons simplement que  $U \subset L^{1,loc}(V)$ . Cela étant, on a le :

Théorème 1 : Soit  $V$  un ensemble ouvert. Si  $f \in L^{1,loc}(V)$  et si, pour tout  $\phi \in D(V)$ , on a

$$\int_V f \phi dV = 0,$$

alors,  $f = 0$  pp dans  $V$ .

Le deuxième théorème d'annulation nous servira sur la surface;

Théorème 2 : Si  $f \in L^2(S_2)$  et si, pour tout  $g \in L^2(S_2)$ ,  
on a

$$\int_{S_2} fg \, dS = 0 ,$$

alors  $f = 0$  pp sur  $S_2$

Ces deux théorèmes vont nous permettre d'obtenir les équations que la fonction  $\theta$  doit vérifier pour être un point stationnaire. Nous devons cependant supposer que  $\theta$  a ses dérivées secondes de carré intégrable ( $\theta \in H^2(V)$ ).

Partons de la condition de stationnarité. Le noeud de la démonstration est le fait que  $D(V) \subset U$  : toute fonction très régulière nulle hors d'un compact de  $V$ , a ses dérivées de carré intégrable. Soit donc  $\phi$  une telle fonction, et introduisons-la dans l'équation (5). Puisque  $\phi$  est nulle sur  $S_2$ , on a donc simplement

$$\int_V k D_i \theta D_i \phi \, dV - \int_V Q \phi \, dV = 0 \quad (6)$$

On intègre le premier terme par parties (et c'est là qu'intervient l'hypothèse supplémentaire de régularité sur  $\theta$ ):

$$\int_V k D_i \theta D_i \phi \, dV = \int_{S_2} k D_i \theta n_i \phi \, dS - \int_V D_i (k D_i \theta) \phi \, dV$$

et, vu que  $\phi = 0$  sur  $S_2$ , la première intégrale du second membre s'annule, si bien que (6) devient

$$- \int_V (D_i (k D_i \theta) + Q) \phi \, dV = 0.$$

Ce raisonnement étant valable pour tout  $\phi \in D(V)$ , le théorème 1 permet d'affirmer que

$$D_i (k D_i \theta) + Q = 0 \quad \text{dans } V \quad (7)$$



Cette condition est appelée équation d'EULER-LAGRANGE du principe variationnel. Cela étant, on repart de la condition de stationnarité (5) avec, cette fois, une fonction quelconque  $\psi$  de l'espace U. On intègre à nouveau par parties, ce qui donne à présent

$$\int_{S_2} (kn_i D_i \theta - \bar{q}) \psi \, dS - \int_V (D_i (kD_i \theta) + Q) \psi \, dV$$

En vertu de (7), cette équation se réduit à

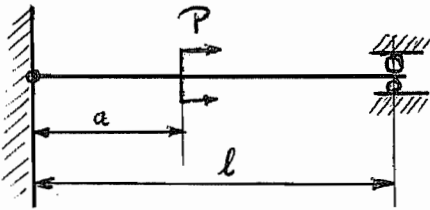
$$\int_{S_2} (kn_i D_i \theta - \bar{q}) \psi \, dS = 0 , \quad (8)$$

ce qui permet de conclure, à l'aide du théorème 2, que  $kn_i D_i \theta = \bar{q}$  sur  $S_2$ .

Cette équation est appelée condition naturelle du principe.

En général, un principe variationnel mène ainsi à des équations d'EULER-LAGRANGE et des conditions naturelles de surface, que l'on obtient en intégrant par parties jusqu'à éliminer les dérivées de la variation :

5. On a remarqué que pour obtenir les équations d'EULER-LAGRANGE et les conditions naturelles, il faut faire une hypothèse anormale de régularité. Pour s'en débarrasser, on part du fait que c'est la nullité de la variation première qui importe. Aussi, on dit que les équations (7) et (8) sont vérifiées faiblement si la condition (5) de nullité de la variation première est vérifiée sans que les conditions de régularité requises pour écrire (7) et (8) soient remplies. La solution obtenue est dite solution faible. Cette notion, bien que rarement définie de manière explicite par les ingénieurs, leur est cependant familière. Pour illustrer cette affirmation, considérons le cas simple d'une barre soumise à une charge P en  $x = a$ .



Le principe variationnel correspondant s'écrit  $((*)' = \frac{d(\cdot)}{dx})$

$$\frac{1}{2} \int_0^l E\Omega u'^2 dx - P u(a) \quad \text{min.}$$

On remarque tout de suite que la charge n'est pas une fonction de la variable  $x$ , mais une mesure de DIRAC portée par le point  $x=a$ .

Pour obtenir la solution, on a recours à un artifice: on note que

$$\frac{1}{2} \int_0^l E\Omega u'^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a E\Omega u'^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^l E\Omega u'^2 dx ,$$

et on intègre séparément les deux termes par parties :

$$[E\Omega u' \delta u]_0^a + [E\Omega u' \delta u]_a^l - \int_0^a E\Omega u'' \delta u dx - \int_a^l E\Omega u'' \delta u dx$$

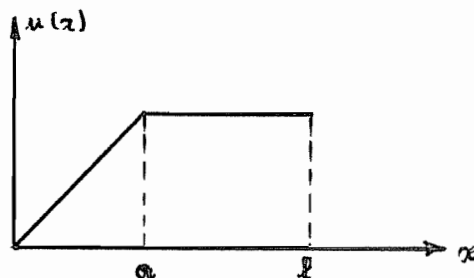
$$- P \delta u(u) = 0 ,$$

ce qui conduit aux conditions

$$\delta u(0) = 0 \text{ (Essentielle)}$$

$$\begin{cases} \delta u(l) \rightarrow E\Omega u'(l) = 0 \\ \delta u(a) \rightarrow E\Omega u'(a_-) - E\Omega u'(a_+) - P = 0 \\ \delta u(x) \rightarrow -E\Omega u'' = 0 \text{ dans } ]0, a[ \cup ]a, l[ \end{cases}$$

De cette manière, on se ramène à deux ouverts disjoints  $]0, a[$  et  $]a, l[$  où la dérivée seconde a du sens. La solution est représentée sur la figure ci-dessous



Elle est composée de deux segments rectilignes. C'est ce que l'on appelle en anglais "a broken extremal". En  $x = a$ , l'équation différentielle n'a pas de sens en tant que telle : il s'agit d'une solution faible.

En règle générale, chaque fois que le second membre n'est pas une fonction mais une mesure ou une distribution, il y a lieu de découper de ceux-ci. On obtient ainsi, outre les équations aux limites naturelles, les conditions de transition d'un sous-domaine à l'autre. La même technique doit également être utilisée lorsque les coefficients sont discontinus (par exemple, dans une barre dont la section varie brusquement).

7. Dans les modèles statiquement admissibles, les choses se présentent quelque peu différemment. Le principe de variation des tensions s'écrit :

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \int_V B_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \, dV - \int_{S_1} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i \, dS \quad \min_{\sigma} \quad (9)$$

le minimum devant être pris sur l'ensemble des tensions en équilibre, c'est-à-dire vérifiant les conditions

$$D_j \sigma_{ji} + f_i = 0 \quad \text{dans } V$$

$$n_j \sigma_{ji} = \bar{t}_i \quad \text{sur } S_2.$$

L'existence de la fonctionnelle  $\Psi$  ne nécessite a priori que la condition

$$\sigma_{ij} \in L^2(V) .$$

Mais comment vérifier l'équilibre sur des fonctions qui n'ont aucune raison d'être ne fût-ce que continues? Pour y arriver, il faut généraliser la notion de dérivée, ce que l'on fait par une démarche inverse de celle qui a été suivie pour établir l'équation d'EULER-LAGRANGE du principe de variation des déplacements : si les tensions

$\sigma_{ij}$  sont suffisamment régulières, on a, pour tout déplacement  $(\phi_i)$ , avec  $\phi_i \in D(V)$ ,

$$\int_V D_j \sigma_{ji} \phi_i \, dV = - \int_V \sigma_{ji} D_j \phi_i \, dV$$

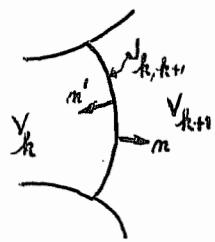
Or le second membre de cette équation garde un sens si les fonctions  $\sigma_{ij}$  cessent d'être régulières. On peut donc l'utiliser comme prolongement de la définition de la dérivée. C'est ce que l'on appelle la dérivée au sens des distributions ou encore, la dérivée généralisée. On constate d'ailleurs, qu'il ne s'agit en substance que d'utiliser le principe des travaux virtuels : celui-ci a donc une portée plus générale que les équations locales d'équilibre. Dans beaucoup de cas, notamment dans les éléments finis, les tensions sont régulières dans des sous-domaines  $V_k$  disjoints qui recouvrent  $V$ . Alors, on a, pour  $\phi_i \in D(V)$ ,

$$\begin{aligned} - \int_V \sigma_{ji} D_j \phi_i \, dV &= - \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \sigma_{ji} D_j \phi_i \, dV \\ &= - \sum_{k=1}^N \left( \int_{\partial V_k} \sigma_{ji} n_j \phi_i \, dS + \int_{V_k} D_j \sigma_{ji} \phi_i \, dV \right); \end{aligned}$$

A l'intérieur de chaque sous-domaine  $V_k$ , on retrouvera donc les équations

$$D_j \sigma_{ji} + f_i = 0 \text{ dans } V_k,$$

car il suffit d'y appliquer le théorème 1 avec  $\phi_i \in D(V_k) \subset D(V)$ . (puisque si  $\phi_i$  est nulle hors de  $K \subset V_k$ , elle est évidemment nulle hors de  $K \subset V$ ). Il reste les termes de frontière des domaines  $\partial V_k$ . Les parties de  $\partial V_k$  communes avec  $S$  ne sont pas concernées, car les  $\phi_i$  y sont nuls. Il ne reste que les interfaces, où l'on obtient :



$$\int_{J_{k,k+1}} (\sigma_{ji} n_j + \sigma'_{ji} n'_j) \phi_i \, dS,$$

ce qui donne, vu le théorème 2,

nécessitera

$$\sigma_{ji} n_j + \sigma'_{ji} n'_j = 0 \quad (\text{Egalité des tractions de surface}).$$

On notera que les tensions sont discontinues chaque fois qu'il existe une charge qui n'est pas une fonction et chaque fois que les coefficients  $B_{ijkl}$  sont discontinus.

Le deuxième point qu'il convient de noter, c'est que si l'on appelle  $\Sigma$  l'ensemble des tensions  $\in L^2(V)$  qui vérifient l'équilibre au sens des distributions, l'ensemble des fonctions tensorielles régulières nulles hors d'un compact de  $V$  n'est pas contenu dans  $\Sigma$  à cause des conditions d'équilibre. En effet, soit  $\phi_i$  un champ de déplacements, avec  $\phi_i \in D(V)$ . Le tenseur

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (D_i \phi_j + D_j \phi_i)$$

est régulier et nul hors du même compact que les  $\phi_i$ , mais on a

$$\int_V \sigma_{ij} D_j \phi_i \, dV = \frac{1}{4} \int_V (D_i \phi_j + D_j \phi_i)^2 \, dV > 0$$

(puisque les modes rigides ne sont pas nuls hors d'un compact de  $V$ ), ce qui montre que l'équilibre n'est pas vérifié. En conséquence, on ne peut pas arriver directement aux équation d'EULER-LAGRANGE comme dans les modèles cinématiquement admissibles.

D'ailleurs, si on pouvait le faire, on obtiendrait  $\sigma_{ij} \equiv 0$  !

8. Terminons par quelques mots sur les multiplicateurs LAGRANGE. Considérons d'abord le cas où l'on veut minimiser une fonctionnelle de la forme

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - f(u), \quad (10)$$

où  $\frac{1}{2} a(u,u)$  est une forme quadratique définie positive, par exemple l'énergie de déformation, et  $f(u)$ , une forme linéaire, soit le travail des forces. Le minimum sera cherché dans un espace admissible  $U$ ; mais on ajoute une contrainte linéaire sur les déplacements, de la forme

$$g(u) = 0, \quad (11)$$

devant être vérifiée par la solution. On peut évidemment restreindre son choix à toutes les fonctions qui vérifient (11), mais ce n'est pas toujours aisé. Une autre solution consiste à utiliser un multiplicateur de LAGRANGE. Nous en donnerons une explication de type

"géométrique". La forme bilinéaire  $a(u,v)$  peut être considérée comme un produit scalaire sur l'espace  $U$ . En particulier, la fonction positive

$$u \rightarrow \|u\| = \sqrt{a(u,u)}$$

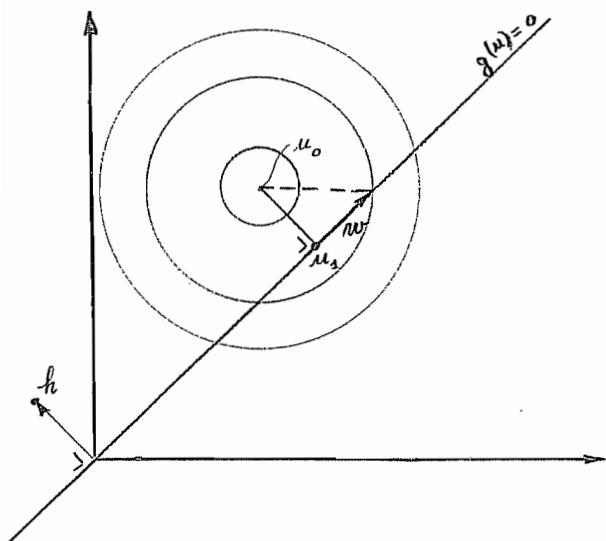
sera appelée norme de  $u$ . Ainsi, on peut définir des boules, qui sont les ensembles

$$B(r) = \{u \mid \|u\| \leq r\}.$$

Le problème de recherche du minimum en l'absence de liaison revient à chercher l'élément  $u \in U$ , tel que, pour tout  $v$  admissible on ait

$$a(u,v) = f(v). \quad (12)$$

La solution  $u$  est encore appelée représentant de RIESZ de la fonctionnelle  $f$ , ce qui fait allusion à un célèbre théorème de F. RIESZ disant que, moyennant une condition dite de complétude,



que nous supposerons toujours vérifiée, le problème (12) admet une solution pour toute fonctionnelle bornée  $f$ .

Si  $u_0$  est la solution du problème (12), on a, pour tout  $v \in U$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(u_0+v) &= \frac{1}{2} a(u_0+v, u_0+v) - f(u_0+v) = \frac{1}{2} a(u_0, u_0) - f(u_0) \\ &\quad + a(u_0, v) - f(v) + \frac{1}{2} a(v, v) \\ &= \Phi(u_0) + \frac{1}{2} a(v, v) \\ &= \Phi(u_0) + \frac{1}{2} \|v\|^2 \quad (13) \end{aligned}$$

ce qui montre que les surfaces de niveau sont les sphères

$$S_r(u_0) = \{u \mid u = u_0 + u_1, \|u_1\| = r\}.$$

Venons-en à notre problème d'extremum lié. Au lieu de rechercher le minimum dans  $U$ , on le recherche sur un plan défini par l'équation  $g(u) = 0$  (voir figure). Le théorème de RIESZ permet d'affirmer l'existence d'un représentant  $h$  de la fonctionnelle  $g$ , ce qui signifie

$$(\forall v \in U) \quad a(h, v) = g(v) \quad (14)$$

L'élément  $h$  est orthogonal au plan  $g(v) = 0$ , puisque

$$g(v) = 0 \Rightarrow a(h, v) = 0 \quad (15)$$

Cela étant, montrons que la solution à notre problème est le point de percée  $u_1$  de la droite partant de  $u_0$ , avec la direction  $h$ , dans le plan  $g(v) = 0$ . En effet, on a vu que

$$\Phi(u_0 + v) = \Phi(u_0) + \frac{1}{2} \|v\|^2 .$$

Or un point quelconque du plan  $g(v)$  a la forme

$$u = u_0 + (u_1 - u_0) + w$$

où

$$u_1 - u_0 = \lambda h \quad \text{et} \quad g(w) = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \Phi(u_0) + \frac{1}{2} a(\lambda h + w, \lambda h + w) \\ &= \Phi(u_0) + \frac{1}{2} \lambda^2 \|h\|^2 + \frac{1}{2} \|w\|^2 , \end{aligned}$$

en vertu de l'orthogonalité (15), Or ceci montre que la valeur au point  $u_1$  est minimale , puisque tout  $w$  additionnel a une contribution positive.

Par conséquent, on a  $u_0 = u_1 - \lambda h$  , et, pour tout  $v \in U$ ,  
 $0 = a(u_0, v) - f(v) = a(u_1, v) - \lambda a(h, v) - f(v)$

Par définition de  $h$ , cette équation s'écrit encore

$$(\forall v \in V) \quad a(u_1, v) - \lambda g(v) - f(v) = 0,$$

avec la condition

$$g(u_1) = 0$$

Or on constate aisément que ces équations sont les variations par rapport à  $u$  et  $\lambda$  de la fonctionnelle augmentée:

$$\Phi^*(u, \lambda) = a(u, u) - \lambda g(u) - f(u),$$



ce qui signifie qu'il suffit d'ajouter à  $\phi$  la condition multipliée par le multiplicateur de LAGRANGE  $\lambda$ , et de varier la somme par rapport à  $u$  et  $\lambda$ . Le multiplicateur  $\lambda$  mesure la distance entre la solution "libre" et la solution "contrainte" : en particulier, si  $h$  est de norme 1,  $\lambda$  est exactement cette distance.

Ce raisonnement peut aisément se généraliser au cas de plusieurs contraintes. Lorsque les contraintes sont locales et non plus globales comme ci-dessus, on a recours à des champs de multiplicateurs. Ainsi, pour exprimer la contrainte

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

dans tout  $V$ , on ajoutera à l'énergie totale le terme

$$- \int_V p \operatorname{div} \vec{u} \, dV,$$

où  $p$  est un champ de multiplicateurs. La justification en est moins aisée. On peut cependant faire le raisonnement suivant : si  $u_i \in H^1(V)$ , la divergence du vecteur  $\in L^2(V)$ . On peut alors décomposer  $p$  en un système total de fonctions orthogonales  $\beta_k$  de  $L^2(V)$  :

$$\int_V \beta_k \beta_\ell \, dV = 0 \quad , \quad p = \sum_k p_k \beta_k$$

Ceci permet de se ramener à l'infinité dénombrable de condition

$$\int_V \beta_k \operatorname{div} \vec{u} \, dV = 0,$$

pour lesquelles on peut utiliser des multiplicateurs  $p_k$ . Visiblement, c'est équivalent au champ de multiplicateurs  $P$ .