This page intentionally left blank.

## XIV. — *Double perspective*,

PAR

**J. B. BRASSEUR.**

## PRÉFACE.

En 1860, le Mémoire qui fait l'objet de la présente publication me fut donné en lecture par mon père, et à différentes reprises, je le pressai de le publier. Il n'en fit rien, en partie parce qu'il avait consacré son temps à la publication de son *Traité de Mécanique appliquée* et à des travaux qui devaient former le complément du Mémoire sur l'application de la géométrie à la recherche des propriétés de l'étendue; en partie peut-être parce qu'il ne croyait pas l'idée développée dans ce travail aussi féconde que celle qui fait l'objet de ce dernier Mémoire.

Je ne pouvais mieux me conformer aux dernières volontés de mon père qu'en remettant le manuscrit à M. Folie, son élève de prédilection, qu'il entourait d'une estime toute particulière, laissant ce géomètre seul juge de l'opportunité qu'il y avait de le publier.

Sans vouloir préjuger la portée scientifique de la Perspective double, ce savant a cru qu'il n'était pas sans intérêt de la faire connaître, afin de donner un exemple et une preuve de plus que tout moyen de représentation par les projections est en même temps un moyen de démonstration et de découverte.

Qu'il me soit permis, en terminant, d'adresser à M. Folie, au nom de toute la famille, les sentiments d'inaltérable reconnaissance pour le dévouement avec lequel il a exécuté le testament scientifique de mon père.

Bruxelles, 29 octobre 1872.

Auguste Brasseur.

# PREMIÈRE PARTIE.

## CHAPITRE I.

### But de la double perspective.

Nous nous proposons de construire sur un même tableau deux perspectives d'un même objet vu de deux points différents.

Le plan horizontal de projection est pris pour tableau. Les deux positions de l'œil sont données par leurs projections sur le tableau et par leurs cotes de hauteur.

**Définitions.** — La perspective d'un point est la trace du rayon visuel de ce point.

Comme chaque objet est vu de deux points différents, il s'ensuit qu'à chaque objet répondent deux perspectives, d'où :

La perspective double d'un point est l'ensemble des deux perspectives simples de ce même point.

La perspective d'une droite est la trace du plan visuel de cette droite.

Comme chaque droite est vue de deux points différents, il s'ensuit qu'à chaque droite, répondent deux perspectives; d'où :

La perspective double d'une droite est l'ensemble des deux perspectives simples de cette même droite.

Nous représenterons par $oo'$, les projections des deux positions de l'œil, et par $(O)(O')$, ces positions elles-mêmes dans l'espace.

## Ligne centrale et point central.

Nous appelons ligne centrale la droite qui unit les deux positions de l'œil, et point central la trace de la ligne centrale.

La perspective d'un point vu de l'œil $(O)$, sera représentée sur les épures par une lettre sans accent, et la perspective du même point vu de l'œil $(O')$ par la même lettre, mais accentuée.

**Principes préliminaires.** — Comme les deux positions de l'œil et le point central sont en ligne droite, il en résulte que :

**I.** — Les projections des deux positions de l'œil et le point central sont en ligne droite sur le tableau.

Comme les deux rayons visuels d'un point et la ligne centrale sont dans un même plan, les traces de ces trois droites sont en ligne droite ; d'où :

**II.** — La droite qui unit les deux perspectives d'un même point de l'espace passe toujours par le point central.

**III.** — Deux points quelconques pris dans le tableau et se trouvant en ligne droite avec le point central peuvent toujours être pris pour les perspectives d'un point de l'espace.

Lorsque trois plans passent par une même droite, leurs traces se coupent sur la trace de cette droite ; d'où :

**IV.** — Les deux perspectives d'une droite et la projection de cette droite concourent en un même point, trace de la droite.

Il résulte des principes de la géométrie que :

**V.** — **La droite qui relie les deux perspectives d'un point est la trace du plan qui contient les deux rayons visuels de ce point.**

**VI.** — Si une droite est parallèle à $(O)(O')$, ses deux perspectives se confondent.

**VII.** — Les perspectives de toutes les horizontales d'un plan sont parallèles à la trace de ce plan.

La perspective d'un point du tableau est elle-même sa projection. Cela posé :

**VIII.** — La projection du rayon visuel d'un point dont on connaît une perspective, est la droite qui unit cette dernière avec la projection de l'œil correspondant à cette perspective.

Donc si $aa'$ sont les deux perspectives d'un point, les projections des rayons visuels de ce point seront $oa$, $o'a'$; et puisque les deux rayons visuels d'un point se coupent, il en résulte que :

**IX.** — La projection d'un point dont on a les deux perspectives $a$, $a'$, se trouve à l'intersection des projections des deux rayons visuels de ce point, donc à l'intersection de $oa$ et de $o'a'$.

## Différentes positions de l'œil.

*a.* Si les deux positions de l'œil sont sur une même horizontale, alors :

1° Le point central $\omega$ se trouve à l'infini sur le tableau.

2° La droite qui relie les deux perspectives d'un point est parallèle à cette horizontale et à sa projection.

*b.* Si les deux positions de l'œil se trouvent sur une même verticale, alors les projections de ces deux positions coïncident avec le point central $\omega$.

*c.* Si l'une des positions de l'œil se trouve au-dessus du tableau et l'autre en-dessous, le point central $\omega$ se trouvera entre les deux projections des deux positions de l'œil.

**Observation.** — Nous verrons au chapitre des applications les avantages qu'on peut retirer du changement et d'une bonne disposition des positions de l'œil.

# CHAPITRE II.

## Positions relatives du point, de la droite et du plan, par rapport au tableau et par rapport aux trois points (O), (O′), (ω).

**1.** Un point peut être au-dessus ou en-dessous du tableau, ou situé sur la ligne centrale, ou coïncider avec l'un des trois points (O), (O′), (ω).

**2.** Une droite peut être perpendiculaire, parallèle ou oblique au tableau, ou passer par l'un des trois points (O), (O′), (ω).

**3.** Un plan peut être perpendiculaire, parallèle ou oblique au tableau. Il peut coïncider avec le tableau, passer par l'un des trois points (O), (O′), (ω), ou par la ligne centrale qui renferme ces trois points.

### 1. Positions relatives du point.

*a.* Un point est situé au-dessus ou en-dessous du tableau, suivant que la projection de ce point est en-deçà ou au-delà de la droite qui unit les deux perspectives du même point.

*b.* Si un point est dans le tableau, ses deux perspectives coïncident. Et réciproquement :

*c.* Si deux perspectives coïncident, elles appartiennent à un point du tableau.

**Observation.** — Cette réciproque présente une exception; en effet : Si un point se trouve sur la ligne centrale, ses deux perspectives coïncident avec le point central, et, pour que ce point soit déterminé, il faut connaître encore sa projection.

### 2. Positions relatives de la droite.

*a.* Une droite est perpendiculaire au tableau, si ses deux perspectives passent respectivement par les projections des deux positions de l'œil. Et réciproquement :

*b.* Une droite est parallèle au tableau si ses deux perspectives sont parallèle. Et réciproquement :

*c.* Si une droite rencontre la ligne centrale, ses deux perspectives coïncident et passent par le point central.

Pour qu'une telle droite soit déterminée, il faut en donner deux points.

*d.* Si une droite passe par l'une ou l'autre position de l'œil, sa perspective prise de cette position se réduit à un point qui est la trace de la droite, et sa perspective prise de l'autre position passe par la trace de la même droite et par le point central.

### 3. Positions relatives du plan.

*a.* Nous représenterons le plan par une de ses lignes de plus grande pente.

*b.* Un plan est vertical si sa ligne de plus grande pente est verticale.

## Intersection de deux droites.

**Principe.** — On reconnaît que deux droites se coupent ou sont situées dans un même plan, quand la droite qui unit les intersections des perspectives *de même nom* passe par le point central.

En effet, les perspectives du point de rencontre des deux droites doivent se trouver sur les perspectives *de même nom* de la première droite et sur les perspectives *de même nom* de la seconde droite; donc à l'intersection des perspectives de même nom des deux droites. Or, la droite qui unit les deux perspectives d'un même point doit passer par le point central.

## CHAPITRE III.

### Rappel de quelques principes de géométrie élémentaire et de géométrie descriptive.

1. Toutes les droites d'un même plan ont leurs traces respectives sur la trace du plan.

2. La trace d'un plan qui passe par une horizontale est parallèle à cette horizontale et à la projection de cette dernière.

3. La droite d'intersection de deux plans a pour traces les points d'intersection des traces de même nom de ces deux plans.

4. Connaissant deux droites d'un plan, on peut construire les traces de ce plan.

5. Si un plan passe par une droite, la trace du plan passe par la trace de même nom de la droite.

6. La projection d'une droite située dans un plan rencontre la trace du plan en un point qui est la trace de la droite.

7. Tous les points de l'espace situés dans un plan qui n'est pas vertical sont en ligne droite si leurs projections sont en ligne droite.

8. Le point d'intersection de la projection d'une droite avec la trace d'un plan est la projection du point de la droite qui coupe le plan vertical élevé suivant la trace du plan.

## CHAPITRE IV.

### Problèmes fondamentaux relatifs au point, à la droite et au plan.

**Problème I.** — *Construire les perspectives d'un point quelconque d'une droite donnée* (d, d').

**Solution.** — Une droite quelconque menée dans le tableau par le point central $\omega$ rencontre la première perspective ($d$)

de la droite en un point ($a$), et la seconde perspective ($d'$) de la même droite en un point ($a'$). Dès lors $a$, $a'$ sont les perspectives d'un point de la droite.

**Remarques.** — 1. Dans le cas particulier où la transversale menée par le point central $\omega$, rencontre la perspective $d'$ en $a'$, et la perspective $d$ à l'infini, alors $a'$, $\infty$, seront les perspectives d'un point de la droite de même cote que l'œil (O).

2. Si la même transversale rencontre la perspective $d$ en $a$, et la perspective $d'$ à l'infini, alors $a$, $\infty$, seront les perspectives d'un point de la droite de même cote que l'œil (O').

**Problème II.** — *Étant donnée une droite* (d, d'), *construire sa projection.*

**Solution.** — On prendra sur la droite un point dont on construira la projection, d'après le principe préliminaire IX. La droite qui unit la projection de ce point à la trace de la droite est la projection demandée.

**Problème III.** — *Étant données la projection d'un point et la perspective* a *de ce point, trouver l'autre perspective* a' *du même point.*

**Solution.** — Unir le point central $\omega$ à la perspective $a$; unir de même l'œil $o'$ avec la projection donnée. L'intersection de ces deux droites est la perspective $a'$ demandée.

**Remarque.** — Pour abréger le discours, nous nous servirons toujours des lettres minuscules pour représenter les perspectives, et des lettres majuscules correspondantes pour représenter les projections. Ainsi ($aa'$) seront les perspectives d'un point dont A sera la projection; ($d$, $d'$), les perspectives d'une droite dont D sera la projection.

**Problème IV.** — *Étant donnée la projection* A *d'un point d'une droite donnée* (d, d'), *construire les perspectives de ce point.*

**Solution.** — Les projections des deux rayons visuels de ce point sont ($o$A) et ($o'$A); ces deux projections rencontrent respectivement les deux perspectives $d, d'$ en deux points $a, a$ qui sont les perspectives demandées.

**Remarque.** — Si l'on a bien opéré, les points $a, a'$ doivent se trouver en ligne droite avec le point central $\omega$ (II, Principes préliminaires).

**Problème V.** — *Étant données l'une des perspectives* d *d'une droite, et la projection* D *de celle-ci, trouver l'autre perspective* d' *de cette droite.*

**Solution.** — D'abord, la trace de la droite se trouvera au point d'intersection de la projection D avec la perspective $d$; et la seconde perspective $d'$ devra passer par cette trace (IV, Principes préliminaires). Cela posé : En tirant par le point $o$, une droite quelconque, elle rencontrera la projection D en un point A, et la perspective $d$ en un point $a$. Dès lors A sera la projection d'un point de la droite, et $a$ une perspective du même point prise de l'œil $o$. Il ne reste donc plus qu'à construire la seconde perspective $a'$ du même point, d'après le Problème III.

La perspective demandée $d'$, devant passer par la seconde perspective du point mentionné et par la trace de la droite se trouve entièrement déterminée.

**Problème VI.** — *Vérifier si deux droites données* (d, d') *et* $(\delta, \delta')$ *se coupent.*

**Solution.** — Il suffit de vérifier, d'après ce qui a été dit plus haut (Intersection de deux droites), si le point d'intersection des perspectives de même nom $d$ et $\delta$, et le point d'intersection des deux autres perspectives de même nom $d'$ et $\delta'$, sont en ligne droite avec le point central $\omega$. (II, Principes préliminaires).

**Problème VII.** — *Étant données les deux perspectives d'un point d'une droite et la trace de celle-ci, construire les deux perspectives de la droite.*

**Solution.** — Les deux perspectives demandées doivent partir toutes deux de la trace donnée (IV, Principes préliminaires), et passer respectivement par les deux perspectives du point.

Problème VIII. — *Construire la trace d'un plan passant par deux droites* (d, d′) *et* (δ.δ′).

**Solution.** — Construire les traces *t*, *t′* des deux droites (*d*, *d′*) et (δ, δ′). La trace demandée passe par les traces *t*, *t′* de ces deux droites.

Problème IX. — *Par un point donné mener une parallèle à une droite donnée.*

**Solution.** — Par le point donné, mener une droite qui rencontre la droite donnée, puis on achève comme ci-après.

Problème X. — *Étant données deux droites qui se coupent, par un point pris sur la première mener une parallèle à la seconde.*

**Solution.** — Les deux droites données (*d.d′*) et (δ.δ′) et la droite demandée étant dans un même plan, leurs trois traces doivent être en ligne droite. Cela posé, on construira : 1° La trace T du plan passant par les deux droites (*d.d′*) et (δ.δ′); 2° la projection Δ de la seconde droite (δ.δ′); 3° la projection A du point (*a.a′*) pris sur la première. Par cette projection on mènera une parallèle à la projection Δ de la seconde droite. La rencontre de cette projection avec la trace T du plan sera la trace de la droite demandée dont on connaît déjà un point (*a.a′*).

Problème XI. — *Par un point donné, mener une horizontale qui rencontre une droite donnée.*

**Solution.** — Construire la trace du plan qui passe par le point et la droite donnés. Les parallèles à cette trace, menées respectivement par les deux perspectives du point donné, seront les perspectives de l'horizontale demandée. (VII, Principes préliminaires.)

Problème XII. — *Un plan est représenté par sa trace et un point; on donne l'une des deux perspectives d'une droite passant par ce point. On demande de construire l'autre perspective de cette droite.*

**Solution.** — La perspective cherchée doit passer par la perspective de même nom du point donné; de plus, elle doit rencontrer la perspective de la droite sur la trace du plan. Donc elle est déterminée.

**Problème XIII.** — *Un plan est représenté par sa trace et un point; on donne l'une des deux perspectives d'un second point. On demande de construire l'autre perspective de ce second point.*

**Solution.** — La droite qui unit la perspective connue du second point avec la perspective de même nom du premier est une des deux perspectives d'une droite du plan. En construisant, d'après le problème XII, l'autre perspective de cette droite, la solution bien simple est ramenée à celle du problème I.

**Problème XIV.** — *Un plan est représenté par sa trace et par une droite; construire les perspectives d'une seconde droite du plan, connaissant la projection de cette seconde droite.*

**Solution.** — Soient T la trace du plan et $(d.d')$ les perspectives de la droite; soit P la projection de la seconde droite du plan. Cela étant, pour avoir la trace de la droite demandée, il suffit de prolonger la projection P jusqu'à la rencontre de la trace T du plan donné. Il reste à trouver les perspectives d'un second point de la même droite. Or, le point de rencontre des projections des deux droites est la projection du point de rencontre des deux droites dans le plan. Mais ce point appartenant à la première droite $(d.d')$ on pourra donc en construire les perspectives.

**Problème XV.** — *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan vertical représenté par sa projection.*

**Solution.** — Le point de rencontre de la projection de la droite avec la projection du plan est la projection du point de rencontre demandé. Or, comme ce point appartient à la droite donnée, on pourra, d'après le problème IV, construire les perspectives de ce point.

**Problème XVI.** — *Construire l'intersection d'un plan vertical avec un plan représenté par sa trace et par une droite.*

**Solution.** — D'abord, le point d'intersection des traces des deux plans est la trace de la droite d'intersection de ces mêmes plans. Il reste à trouver un second point de cette intersection. La projection de la droite donnée rencontre la projection du plan vertical en un point qui est la projection d'un point de l'intersection des deux plans. On pourra donc en construire les perspectives (problème XV), qui seront celles d'un second point de l'intersection demandée.

**Problème XVII.** — *Par un point donné, mener une droite qui rencontre deux autres droites données.*

**Solution.** — Construire la trace du plan qui passe par le point et la première droite (Voir le problème VIII); construire de même la trace du plan qui passe par le même point et la seconde droite. La droite d'intersection de ces deux plans est la droite cherchée. Mais les deux perspectives de la droite cherchée devant se couper au point d'intersection des traces des deux plans et passer respectivement par les perspectives du point donné, sont par conséquent entièrement déterminées.

**Problème XVIII.** — *Déterminer le point de rencontre d'une droite avec le plan horizontal passant par l'œil* ($O'$).

**Solution.** — Le point demandé ayant même cote que l'œil ($O'$), sa perspective se trouvera à une distance infinie sur la perspective de même nom de la droite proposée. Donc la parallèle menée du point central $\omega$ à la perspective de la droite donnée prise de l'œil ($O'$) déterminera sur la perspective de la même droite prise de l'œil ($O$), le point cherché.

*N. B.* Nous représenterons les deux perspectives de ce point par ($a$, $\infty'$).

**Problème XIX.** — *Déterminer le point de rencontre d'une droite avec un plan horizontal représenté par un seul point.*

**Solution.** — Construire la trace du plan passant par le point et la droite donnés. Ce plan sécant coupera le tableau et le plan horizontal donné suivant deux droites parallèles. Par le point donné, il suffira donc de mener une parallèle à la trace du plan sécant sur le tableau et d'en chercher l'intersection avec la droite donnée.

Problème XX. — *Construire la trace du plan passant par deux droites dont les traces coïncident snr le tableau.*

**Solution.** — Prendre un point sur chacune de ces deux droites et chercher la trace de la droite qui passe par ces deux points. Or, la trace du plan cherché doit passer par la trace de cette dernière droite et par la trace commune des deux droites données. Donc elle est déterminée.

Problème XXI. — *Construire la hauteur verticale d'un point* (a, a'), *c'est-à-dire sa distance au tableau.*

**Solution.** — Construire la projection A du point donné. Rabattre le rayon visuel (*oa*) autour de la perspective *oa'* comme charnière, K étant la cote de hauteur de l'œil (*o*). Par la projection A du point élever à la charnière une perpendiculaire jusqu'au rayon rabattu. Cette perpendiculaire est égale à la hauteur demandée.

Problème XXII. — *Construire la distance entre deux points; en d'autres termes, la longueur d'une portion de droite.*

**Solution.** — Soient ($a$, $a'$) et ($b$, $b'$) les deux points donnés. Tracer la droite (A, B) qui unit les perspectives de ces deux points. Chercher, d'après le problème précédent, les hauteurs verticales des deux points proposés. Cela étant, des projections A et B, mener des perpendiculaires à la droite (AB) respectivement égales aux cotes de hauteur des points ($aa'$), ($bb'$), et unir les extrémités. La droite ainsi obtenue est la distance demandée.

Problème XXIII. — *Un plan étant donné par sa trace et par un point, par ce dernier élever une perpendiculaire au plan.*

**Solution.** — Par le point donné, construire la ligne de plus grande pente du plan. Rabattre cette ligne et par conséquent le point proposé autour de la projection de cette ligne comme charnière. Par le point rabattu mener une perpendiculaire à la ligne de plus grande pente rabattue. Le point où cette perpendiculaire rencontre la projection de la ligne de plus grande pente est la trace de la perpendiculaire demandée. Connaissant deux points de cette dernière on peut donc la construire.

**Problème XXIV.** — *Par un point donné abaisser une perpendiculaire sur un plan.*

**Solution.** — Par un point quelconque du plan donné, mener une perpendiculaire à ce plan comme il a été dit au problème précédent. Par le point donné, mener une parallèle à cette perpendiculaire. Cette parallèle sera la droite demandée.

**Problème XXV.** — *Chercher l'angle de deux droites qui se coupent.*

**Solution.** — Construire la trace du plan qui contient ces deux droites (Problème VIII). Rabattre les deux droites autour de cette trace comme charnière; il suffit, à cet effet, de rabattre leur point d'intersection. L'angle qui aura pour sommet ce point rabattu et dont les côtés aboutiront aux deux traces respectives des deux droites données, sera l'angle cherché.

**Problème XXVI.** — *Chercher l'angle de deux droites qui se coupent et dont l'une est parallèle au tableau.*

**Solution.** — Par la trace de la première droite mener dans le tableau une parallèle à l'horizontale. Rabattre la première droite autour de cette parallèle comme charnière, l'angle ainsi obtenu sera l'angle demandé.

**Problème XXVII.** — *Par un point donné, mener une perpendiculaire à une droite donnée.*

**Solution.** — Construire la trace du plan qui contient le point et la droite donnés. Rabattre la droite et le point donnés autour de cette trace comme charnière. Du point rabattu, mener une perpendiculaire à la droite rabattue; cette perpendiculaire coupera la trace du plan en un point qui sera la trace de la perpendiculaire cherchée.

Problème XXVIII. — *Chercher l'angle d'une droite avec un plan.*

**Solution.** — Par un point pris sur la droite, abaisser une perpendiculaire sur le plan donné (Problème XXIV) ; chercher l'angle de ces deux droites (Problème XXV). Cet angle sera le complément de l'angle demandé.

Problème XXIX. — *Chercher l'angle de deux plans.*

**Solution.** — Par un point quelconque, abaisser deux perpendiculaires respectivement aux deux plans donnés (Problème XXIV). Chercher l'angle de ces deux droites (Problème XXV). Le supplément de cet angle sera l'angle demandé.

**Remarque.** — Les autres méthodes pour trouver l'angle de deux plans sont également applicables en *double perspective*, car elles rentrent dans la solution des problèmes résolus précédemment. C'est pour ce motif qu'il nous a paru superflu de les donner ici.

Problème XXX. — *Par une droite mener un plan perpendiculaire à un plan donné.*

**Solution.** — Par un point pris sur la droite abaisser une perpendiculaire sur le plan (Problème X). Chercher le plan qui contient cette perpendiculaire et la droite proposée (Problème VIII) : ce sera le plan demandé.

# SECONDE PARTIE.

## Application de la double perspective à la démonstration des propriétés de l'étendue.

**Préliminaires.** — *a.* A un point de l'espace, il correspond sur le tableau trois points, savoir : les deux perspectives et la projection du point de l'espace.

*b.* A une droite de l'espace, il correspond sur le tableau trois droites concourantes, savoir : les deux perspectives et la projection de la droite de l'espace.

*c*. A un système de polaires de l'espace, il correspond sur le tableau trois systèmes de polaires se coupant sur une même droite. Les deux perspectives et la projection du pôle du système de polaires de l'espace sont respectivement les pôles des trois systèmes de polaires sur le tableau.

Pour vérifier cette proposition, il suffit de mettre en perspective quelques droites concourantes d'un plan.

*d*. A un triangle de l'espace, il correspond sur le tableau trois triangles homologiques dont la projection des deux positions de l'œil est l'axe d'homologie; et plus généralement : A un polygone plan de $n$ côtés de l'espace, il correspond sur le tableau $n$ triangles homologiques dont la projection des deux positions de l'œil est l'axe d'homologie.

Pour le vérifier, il suffit de mettre trois points en perspective.

**Réciproquement.** — *A*. Trois points quelconques, non en ligne droite sur le tableau, peuvent toujours être supposés représenter un point de l'espace.

*B*. Trois droites concourantes quelconques sur le tableau peuvent toujours être supposées représenter une droite de l'espace. Il suffit, en effet, d'en considérer deux comme les perspectives d'une droite de l'espace, et la troisième comme la projection de cette droite.

*C*. Trois systèmes de polaires, sur le tableau, se coupant sur une droite, peuvent toujours être supposés représenter un système unique de polaires de l'espace.

*D*. Trois triangles homologiques, et plus généralement, $n$ triangles homologiques, sur le tableau, pourront toujours être supposés représenter un triangle ou un polygone plan de $n$ côtés de l'espace.

**Définition.** — Si un point de l'espace se projette perspectivement en $(o.o')$, c'est-à-dire sur la projection des deux positions de l'œil, ce point a sa projection sur la droite $o.o'$. Pour construire la projection de ce point, il suffit de rabattre les deux positions de l'œil autour de $o.o'$ comme charnière.

Le point de rencontre des diagonales du trapèze ainsi formé est le rabattement du point dans l'espace; en abaissant du point rabattu une perpendiculaire à la charnière, on obtient la projection cherchée. Nommons ce point point concourant.

Cela étant :

1° Si les perspectives d'une droite de l'espace passent par $o.o'$, cette droite passe par le point concourant.

2° Réciproquement. Si une droite de l'espace passe par le point concourant, ses perspectives passeront respectivement par $o.o'$, et sa projection par la projection du point concourant.

3° Un système de polaires de l'espace dont le pôle est au point concourant est remplacé sur le tableau par deux systèmes de polaires qui se coupent sur une même droite et dont les pôles respectifs sont en $o,o'$.

4° Réciproquement. Deux systèmes de polaires qui se coupent sur une même droite, pourront toujours être pris comme étant les perspectives d'un système unique de l'espace, ayant son pôle au point concourant. Il suffit, en effet, de placer les points de vue $o$, $o'$, aux pôles des deux systèmes.

## Droites et systèmes de polaires s'appuyant sur la ligne centrale.

Tous les points de la ligne centrale ayant leurs perspectives au point central $\omega$, il en résulte que :

1° Tout système de polaires de l'espace qui s'appuye sur la ligne centrale, se projette perspectivement suivant une droite unique passant par le point central $\omega$.

2° Réciproquement. Toute droite du tableau qui passe par le point central peut être considérée comme la perspective double d'un système de polaires de l'espace qui s'appuie sur la ligne centrale.

3° Tous les systèmes de polaires de l'espace qui s'appuient sur la ligne centrale se projettent perspectivement en un système unique de polaires dont le pôle est un point central.

4° Tout système de polaires du tableau dont le pôle passe par le point central, peut être considéré comme la perspective de tous les systèmes de polaires de l'espace qui s'appuient sur la ligne centrale.

**Définition.** — Si $(a, a')$ sont les perspectives d'un point A de l'espace; $(a', a)$ sont les perspectives d'un second point A′, situé en dessous du tableau. Nommons ce point *point inverse*.

Théorème. — *La droite qui unit un point quelconque* (a, a′) *à son point inverse* (a′, a) *passe par le point concourant.*

En effet, ses perspectives passent par $o$, $o'$.

**Théorème.** — Soient $(a, a')$, $(b, b')$, $(c, c')$, etc., les perspectives de points quelconques A, B, C, et de l'espace; si on les unit respectivement à leurs points inverses $(a', a)$, $(b', b)$, $(c', c)$, etc.

1° *Toutes ces droites formeront un cône ayant pour sommet le point concourant*;

2° *Toutes les projections des génératrices passeront par un point de la ligne* a, a′, ω, *projection du point concourant.*

Cela résulte du théorème précédent et de la définition du point concourant.

Théorème. — *Tant de quadrilatères de même base qu'on voudra étant donnés, si les côtés opposés à cette base se coupent en un même point de la base commune, les droites qui joignent les points de concours des deux autres côtés à l'intersection des diagonales, se coupent également toutes en un même point de la ba . commune.*

**Solution.** — Il suffit de mettre deux points en pe. . ective ainsi que leurs points inverses.

## Théorèmes relatifs aux systèmes de polaires.

Si l'on met en perspective une droite, et si l'on prend différents points sur cette droite, il est visible qu'on obtient trois systèmes de polaires se coupant deux à deux et ayant leurs pôles sur la ligne centrale, d'où :

Théorème. — *Si les droites qui joignent les transversales de deux systèmes de polaires concourent en un même point de la ligne des pôles, ces deux systèmes de polaires se coupent sur une droite concourante avec les deux transversales.*

Théorème. — *Réciproquement. Si deux systèmes de polaires se coupent sur une droite, et si par un point de cette dernière on leur mène deux transversales quelconques, les droites qui relient ces deux transversales forment un troisième système de polaires ayant son pôle sur la ligne des pôles des deux premiers.*

Si l'on met en perspective une horizontale, et si l'on prend différents points sur cette droite, il est visible qu'on obtient trois systèmes de polaires se coupant deux à deux et ayant leurs pôles sur la projection de la ligne centrale; d'où :

Théorème. — *Si les droites qui joignent les transversales parallèles de deux systèmes de polaires concourent en un même point de la ligne des pôles, ces deux systèmes de polaires se coupent sur une parallèle à la ligne des pôles.*

**Réciproquement.** — La réciproque est également facile.

Si les deux positions de l'œil se trouvent sur une parallèle au tableau, alors le point central $\omega$ passe à l'infini. Dans ces conditions, en mettant en perspective une droite et quelques-uns de ses points, on en déduit que :

Théorème. — *Si les droites qui joignent les transversales de deux systèmes de polaires sont parallèles, ces deux systèmes se coupent sur une droite concourante avec les deux transversales.*

Si au lieu de prendre deux points de vue (O) (O′), on en prenait trois (O), (O′), (O″) en ligne droite, il est visible que 4 droites concourantes sur le tableau répondent à une droite unique de l'espace, savoir : ses trois perspectives prises respectivement de O, O′, O″, et sa projection.

Il est dès lors facile d'appliquer les théorèmes qui précèdent à trois systèmes de polaires. L'énoncé d'un seul suffira :

Théorème. — *Si les droites qui joignent les trois transversales concourantes de trois systèmes de polaires se coupent en un même* *point de la ligne des pôles, ces trois systèmes de polaires se coupent sur une droite concourante avec les trois transversales.*

La réciproque est également vraie.

Pour donner à ces théorèmes toute la généralité possible, il suffit de remarquer qu'en prenant sur la ligne centrale $n$ points de vue; pour chaque point de l'espace, on a, sur le tableau $n+1$ points, savoir : $n$ perspectives plus la projection de ce point. De même pour chaque droite de l'espace on a, sur le tableau $n+1$, droites concourantes, savoir : $n$ perspectives et la projection de la droite.

En prenant $n$ points de vue, si l'on met en perspective une droite et si l'on marque quelques points sur cette droite, on aura en perspective sur le tableau $n+1$ systèmes de polaires. D'où le théorème général :

Théorème. — *Un nombre quelconque de systèmes de polaires ayant leurs pôles sur une même droite étant donnés; si les droites qui relient les transversales concourantes de ces systèmes concourent en un même point de la ligne des pôles, tous ces systèmes de polaires se coupent sur une même droite concourante avec les transversales.*

Théorème. — *Réciproquement. Si un nombre quelconque de systèmes de polaires ayant leurs pôles sur une même droite se coupent sur une droite unique, et si par un point de cette dernière, on les coupe par un système de polaires, les droites qui relient les points de division concourent en un même point de la ligne des pôles.*

Théorème. — *Tant de systèmes de polaires qu'on voudra étant donnés d'une façon quelconque dans un plan; si, en les coupant par des transversales concourantes, les droites qui relient chaque paire arbitraire de transversales concourent en un point, tous les systèmes énoncés se coupent sur une droite unique passant par le point de concours des transversales.*

Théorème. — *Réciproquement. Si tant de systèmes qu'on voudra se coupent sur une même droite, et si par un point de cette dernière on mène des transversales, les droites qui relient chaque paire arbitraire de transversales se coupent en un même point.*

Il est entendu que ce point est différent pour chaque paire de transversales.

Si l'on met en perspective deux points situés sur une même verticale et si l'on construit leurs points inverses, les droites qui unissent ces points fournissent le théorème :

Théorème. — *Dans un quadrilatère quelconque toutes les droites issues du point de rencontre de deux côtés opposés déterminent sur les deux diagonales une série de paires de points qui, reliés aux deux extrémités libres des mêmes diagonales, donnent une série de triangles dont tous les sommets se trouvent sur la droite qui unit l'intersection des diagonales au point de rencontre des deux autres côtés opposés du quadrilatère.*

Au surplus, ce théorème peut se généraliser :

Théorème. — *Un quadrilatère quelconque étant donné, toutes les droites issues d'un point pris arbitrairement sur les deux côtés déterminent sur les diagonales une série de paires de points qui, reliés aux deux extrémités libres des mêmes diagonales, donnent une série de triangles dont tous les sommets se trouvent sur une droite passant par l'intersection des diagonales.*

## Triangles homologiques.

Théorème. — *Les perspectives de deux points et leurs projections respectives donnent lieu à deux triangles homologiques ayant pour axe d'homologie la projection* (o, o') *de la ligne centrale et, pour centre d'homologie, la trace de la droite qui unit ces deux points.*

Il suffit en effet de mettre deux points en perspective pour le prouver.

Théorème. — *Réciproquement. Deux triangles homologiques pourront toujours être considérés comme étant la perspective de deux points de l'espace.*

On étendrait facilement ces théorèmes à trois points de l'espace qui donnent lieu à trois triangles homologiques.

Si l'on met deux points en perspectives, on sait que les droites qui relient les perspectives de même nom concourent avec la droite qui relie les projections; d'où :

Théorème. — *Si deux triangles sont tels que leurs côtés se coupent, deux à deux, en trois points situés en ligne droite, leurs sommets sont sur trois droites concourantes en un même point.*

[Chasles, *T. de Géométrie supérieure*, p. 271.]

Théorème. — *Réciproquement. Quand deux triangles ont leurs sommets, deux à deux, sur trois droites concourantes en un même point, leurs côtés se rencontrent, deux à deux, en trois points situés en ligne droite.* [Chasles, *T. de Géométrie supérieure*, p. 270.]

Théorème. — *Si l'on met en perspective deux points d'une droite dont la trace est sur la ligne centrale, on a deux triangles homologiques dont le centre d'homologie est sur l'axe d'homologie.*

En effet, les perspectives de la droite qui unit les deux points de l'espace doivent se couper sur la trace de cette droite, et cette trace est précisément sur la ligne centrale qui est l'axe d'homologie.

Théorème. — *Si l'on met en perspective deux points d'une même horizontale, on a deux triangles homologiques dont le centre d'homologie est à l'infini.*

En effet, les deux perspectives et la projection d'une horizontale sont parallèles entre elles.

**Remarque.** — Si l'horizontale était parallèle à la projection de la ligne centrale, alors le centre d'homologie des deux triangles homologiques cités plus haut se trouverait à l'infini *mais sur l'axe d'homologie.*

Théorème. — *Quand trois triangles, homologiques deux à deux, ont le même axe d'homologie, leurs trois centres d'homologie sont en ligne droite.* [Chasles, *T. de Géométrie supérieure*, p. 283.]

**Démonstration.** — Soient donnés trois points $(a.a')$, $(b.b')$, $(c.c')$, et leurs projections respectives A, B, C. Ces perspectives forment avec les projections trois triangles $(a.a'\mathrm{A})$, $(b.b'\mathrm{B})$, $(c.c'\mathrm{C})$, homologiques deux à deux et ayant même axe d'homologie. Les traces des trois côtés du triangle de l'espace sont les trois centres d'homologie des triangles pris deux à deux. Mais les trois côtés d'un triangle coupent le tableau en trois points en ligne droite. Donc, etc.

**Théorème.** — *Quand deux triangles sont homologiques, si l'on fait tourner le plan de l'un d'eux autour de l'axe d'homologie, les droites qui joignent deux à deux leurs sommets homologues concourent en un même point; 2° et ce point, variable de position, décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe d'homologie.*

[CHASLES, *T. de Géométrie supérieure*, p. 273.]

**Démonstration.** — 1° Si l'on met en perspective deux points $(a.a')$, $(b.b')$, on a deux triangles homologiques $(aa'A)$, $(bb'B)$. Or, si l'on fait tourner le tableau autour de la ligne centrale en emportant seulement dans ce mouvement de rotation le triangle $(bb'B)$, tous les côtés prolongés de ce dernier triangle passeront toujours respectivement par les points $(o)$, $(o')$, $(\omega)$. Mais les côtés du triangle fixe passent également respectivement par les points $(o)$, $(o')$, $(\omega)$; donc les côtés correspondants des deux triangles se trouvent respectivement dans trois plans et les droites qui unissent deux à deux leurs sommets homologues concourent en un même point S. Donc, etc.

2° Dans ce mouvement de rotation, les sommets $b, b', B$, du triangle mobile, décrivent trois cercles perpendiculaires à l'axe d'homologie, tandis que les sommets correspondants de l'autre triangle restent fixes. Les droites $ba$, $b'a'$, BA, décrivent donc trois cônes à bases circulaires dont les sommets respectifs sont aux points $a, a'$, A. Comme chaque point des génératrices $ba$, $b'a'$, BA, décrit un cercle perpendiculaire à la ligne centrale, l'intersection S de ces génératrices décrira un cercle perpendiculaire à la même ligne. Donc, etc.

**Théorème.** — *Deux points étant donnés* (a.a'), (b.b'), *ainsi que leurs inverses* (a'.a), (b'.b), *si l'on construit les projections* A,B *de ces points et les projections* A', B' *de leurs inverses, on obtient deux quadrilatères homologiques dont les diagonales correspondantes concourent deux à deux en un point de l'axe d'homologie.*

Il suffit de remarquer que la droite qui, sur le tableau, relie la projection d'un point à la projection du point inverse passe toujours par le point concourant projeté.