This page intentionally left blank.

IX. — *Note sur un nouvel énoncé des conditions d'équilibre d'un système de forces ;*

Par J.-B. BRASSEUR ,

PROFESSEUR ORDINAIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Premier cas : les forces sont situées dans un même plan.

Tant de forces que l'on voudra, situées dans un même plan et appliquées à un système de points invariablement liés entre eux, se font équilibre, lorsque la somme de leurs moments est nulle par rapport à chacun de trois points quelconques non en ligne droite.

Démonstration. **Représentons**

par P, P', P'', etc. les forces données,
par (x,y), (x',y'), (x'',y''), etc. les coordonnées rectangulaires de leurs points d'application.

Ayant décomposé chacune de ces forces en deux respectivement parallèles aux deux axes coordonnés, désignons

par X, X', X'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des x,
par Y, Y', Y'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des y.

Cela posé, si nous exprimons que la somme des moments de toutes ces forces est nulle d'abord par rapport à l'origine, puis par rapport à deux autres points quelconques, non en ligne droite avec l'origine, nous aurons, en représentant par (a,b), (a',b') les coordonnées de ces deux derniers points, les trois équations écrites en abrégé :

$$\Sigma(Xy-Yx)=0,$$
$$\Sigma[X(y+b)-Y(x+a)]=0,$$
$$\Sigma[X(y+b')-Y(x+a')]=0.$$

Conservant la première et réduisant les deux autres au moyen de la première, il vient

$$\left.\begin{array}{r}\Sigma(Xy-Yx)=0\\ \Sigma(Xb-Y)=0\\ \Sigma(Xb'-Ya')=0\end{array}\right\}\ \text{ou bien}\ \left\{\begin{array}{l}\Sigma(Xy-Yx)=0\ ..(1)\\ b\Sigma X-a\Sigma Y=0\ ..(2)\\ b'\Sigma X-a'\Sigma Y=0\ ..(3).\end{array}\right.$$

Les deux dernières équations (2,3) donnent, en éliminant successivement ΣX et ΣY, les deux équivalentes

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right)\Sigma Y=0\,,\quad \left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\Sigma X=0\,,$$

qui ne peuvent exister à moins que l'on ait séparément

$$\Sigma X=0 \text{ et } \Sigma Y=0 \,\ldots\ldots (m)\,;$$

car le facteur $\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right)$ égalé à zéro conduirait à conclure que les deux points (a,b), (a',b') sont en ligne droite avec l'origine, ce qui est contre l'hypothèse que nous avons faite. Or, les deux dernières équations $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$ avec l'équation (1) expriment précisément les conditions connues pour l'équilibre d'un système de forces situées dans un même plan ; donc, etc.

Second cas : les forces sont situées dans l'espace.

Tant de forces que l'on voudra, appliquées d'une manière quelconque à un système de points invariablement liés entre eux, se font équilibre lorsque, ces forces étant projetées successivement sur les trois plans coordonnés rectangulaires, la somme des moments des projections de ces forces sur chaque plan coordonné est nulle d'abord par rapport à l'origine et puis par rapport à un autre point quelconque de ce plan ; seulement les trois points quelconques, choisis respectivement dans les trois plans coordonnés, ne doivent pas être les projections d'un même point de l'espace.

Démonstration. Représentons

par P, P', P'', etc. les forces données,
par (x,y,z), (x',y',z'), (x'',y'',z''), etc. les coordonnées de leurs points d'application.

Décomposons chacune des forces en trois respectivement parallèles aux trois axes rectangulaires et désignons
par X, X', X'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des x,
par Y, Y', Y'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des y,
par Z, Z', Z'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des z.

Cela posé, pour exprimer d'abord que la somme des moments des projections de toutes les forces sur chaque plan coordonné est nulle par rapport à l'origine, nous aurons les trois équations connues

$$\Sigma(Xy-Yx)=0,\quad \Sigma(Xz-Zx)=0,\quad \Sigma(Zy-Yz)=0\ldots (m).$$

Prenons actuellement
dans le plan des xy un point dont les coordonnées soient a,b,
dans celui des xz un point dont les coordonnées soient a,c,
dans celui des yz un point dont les coordonnées soient b,c';
ces trois points ainsi choisis respectivement dans les trois plans coordonnés ne seront pas les projections d'un même point de l'espace; car pour cela il faudrait que l'on eût $c'=c$.

Pour exprimer maintenant que la somme des moments des projections de toutes les forces sur chaque plan coordonné est nulle par rapport au point que nous avons choisi plus haut dans ce même plan; nous aurons les trois nouvelles équations

$$\begin{aligned}&\Sigma[X(y+b)-Y(x+a)]=0,\\&\Sigma[X(z+c)-Z(x+a)]=0,\\&\Sigma[Z(y+b)-Y(z+c')]=0,\end{aligned}$$

qui se réduisent en vertu des trois équations (m) à

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma(Xb-Ya)=0\\&\Sigma(Xc-Za)=0\\&\Sigma(Zb-Yc')=0\end{aligned}\right\}\text{ ou bien }\left\{\begin{aligned}&b\Sigma X-a\Sigma Y=0\\&c\Sigma X-a\Sigma Z=0\\&b\Sigma Z-c'\Sigma Y=0\end{aligned}\right\}\ldots(n).$$

En éliminant ΣX et ΣZ de ces trois équations (n), on a $(c-c')\Sigma Y=0$; et puisque $(c-c')$ n'est pas nul, on a nécessairement $\Sigma Y=0$; et les équations (n) deviennent

$$\Sigma X=0,\qquad \Sigma Y=0,\qquad \Sigma Z=0.$$

Or, ces trois équations constituent avec les trois équations (m) les six conditions d'équilibre connues; donc, etc.