Mémoires de la Société royale des sciences de Liège.
Liège [etc.],La Société.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/39398

t.1er: http://www.biodiversitylibrary.org/item/54784

Article/Chapter Title: Lignes de courbure
Author(s): Brasseur, Jean-Baptiste
Page(s): Page 263, Page 264, Page 265, Page 266, Page 267, Page 268, Page 269, Page 270, Page 271, Page 272, Page 273, Page 274, Page 275, Page 276

This page intentionally left blank.

XIII. *Lignes de courbure de quelques surfaces exprimées par des équations différentielles partielles; et Note sur une propriété de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique;*

PAR M. J.-B. BRASSEUR,

Professeur de Géométrie descriptive et de Mécanique appliquée à l'Université de Liége.

A cause de la grande généralité dont jouissent les équations différentielles partielles, considérées comme représentant des surfaces, il ne m'a pas paru sans intérêt d'examiner si l'analyse peut conduire à la connaissance des lignes de courbure d'une famille de surfaces exprimées par une même équation différentielle partielle.

Les seuls cas, où cette recherche me paraisse pouvoir conduire à un résultat, sont ceux où les deux racines de $\frac{dy}{dx}$, que fournit l'équation générale des lignes de courbure

$$\frac{dy^2}{dx^2}\Big[(1+q^2)s-pqt\Big]+\frac{dy}{dx}\Big[(1+q^2)r-(1+p^2)t\Big]-\Big[(1+p^2)s-pqr\Big]=0..(\mathrm{A})$$

sont séparables, c'est-à-dire, où la quantité sous le radical, en résolvant cette équation par rapport à $\frac{dy}{dx}$, est un carré parfait. Nous renvoyons, pour l'intelligence de l'équation ci-dessus, ainsi que des surfaces que nous examinons ci-après, à l'ouvrage de Monge: *Application de l'analyse à la géométrie, quatrième édition.*

I.

Lignes de courbure des surfaces cylindriques.

$x=az$, $y=bz$ étant les équations d'une droite quelconque menée par l'origine des axes coordonnés; on a pour l'équation différentielle partielle de toutes les surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles à cette droite (M. p. 5),

$$ap + bq = 1 \ldots (1)$$

Différentiant partiellement cette équation, d'abord par rapport à x et puis par rapport à y, il vient

$$ar + bs = 0 \ldots (2)$$

$$as + bt = 0 \ldots (3)$$

en substituant dans l'équation (A) les valeurs de r et de t tirées de (2 et 3) et réduisant d'après (1), tous les termes du résultat seront divisibles par s, et l'on aura

$$\frac{dy^2}{dx^2} a(b+q) + \frac{dy}{dx}\Big[a(a+p) - b(b+q)\Big] - b(a+p) = 0.$$

Cette équation devient, en faisant $a+p=m$, $b+q=n$,

$$\frac{dy^2}{dx^2} an + \frac{dy}{dx}\left(am - bn\right) - bm = 0;$$

en la résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$ on trouve que la quantité sous le radical est un carré parfait, et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bn - am \pm (am + bn)}{2an} \ldots (B)$$

Prenant le signe $+$, on aura pour l'équation de l'une des deux lignes de courbure : $a\,dy = b\,dx$, dont l'intégrale est, en désignant par α une constante arbitraire,

$$ay - bx = \alpha \ldots (4).$$

Or, cette équation représente un plan vertical parallèle à la droite $x=az$, $y=bz$, et par suite parallèle aux génératrices du cylindre; donc l'une des lignes de courbure n'est autre chose que l'intersection de ce plan avec la surface proposée et par suite une génératrice.

En prenant le signe $-$ dans (B), l'équation de l'autre ligne de courbure sera :

$$ndy + mdx = 0,$$

qui devient en remettant pour m et n leurs valeurs et en remplaçant $pdx + qdy$ par sa valeur dz

$$adx + bdy + dz = 0$$

dont l'intégrale est, en désignant par β une constante arbitraire,

$$ax + by + z = \beta \ldots (5)$$

Cette équation étant celle d'un plan perpendiculaire à la droite $x=az$, $y=bz$ et par suite perpendiculaire aux génératrices du cylindre, il s'ensuit que la seconde ligne de courbure, qui passe par chaque point d'une surface cylindrique, est également plane et qu'elle est l'intersection de ce plan avec la surface cylindrique, c'est-à-dire, une section droite du cylindre.

Les constantes arbitraires α, β, qui entrent dans les équations (4 et 5), seront déterminées par des valeurs particulières de x, y, z; c'est-à-dire en assignant sur la surface un point par lequel on veut faire passer les deux lignes de courbure.

II.

Lignes de courbure des surfaces coniques.

L'équation différentielle partielle de toutes les surfaces coniques est, en supposant le sommet à l'origine, (M. p. 10),

$$z = px + qy \ldots (1).$$

Différentiant deux fois partiellement cette équation on a :

$$xr + ys = 0 \ldots (2).$$

$$xs + yt = 0 \ldots (3).$$

Substituant les valeurs de r et de t fournies par ces deux équations dans l'équation générale des lignes de courbure, tous les termes seront divisibles par s, et si l'on réduit au moyen de l'équation (1), elle pourra être mise sous la forme.

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left(y + qz\right)x + \frac{dy}{dx}\Big[x(x+pz) - y(y+qz)\Big] - y(x+pz) = 0.$$

et devient en faisant $x + pz = m$, $y + qz = n$

$$\frac{dy^2}{dx^2}nx + \frac{dy}{dx}\left(mx - ny\right) - my = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à $\frac{dy}{dx}$, la quantité sous le radical sera un carré parfait et l'on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-mx + ny \pm (mx + ny)}{2nx} \ldots (B),$$

en prenant le signe $+$, l'équation de la première ligne de courbure sera

$$xdy = ydx, \text{ dont l'intégrale est } y = \alpha x \ldots (4)$$

α étant une constante arbitraire.

Cette équation étant celle d'un plan passant par l'origine, c'est-à-dire, par le sommet du cône, exprime que la première ligne de courbure est plane et comme elle ne peut être que l'intersection de ce plan avec la surface conique, il s'ensuit que c'est une génératrice du cône.

Avec le signe — l'équation (B) donne pour la seconde ligne de courbure

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n}, \text{ ou bien, } \frac{dy}{dx} + \frac{x + pz}{y + qz} = 0;$$

réduisant au même dénominateur et observant que $dz = pdx + qdy$ on a

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

dont l'intégrale est, en désignant par β une constante arbitraire

$$x^2 + y^2 + z^2 = \beta \;.\;.\;.\; (5).$$

Cette équation, étant celle d'une sphère dont le centre est au sommet du cône, il suit que la seconde ligne de courbure est l'intersection de la surface conique avec la surface d'une sphère dont le centre coïncide avec le sommet du cône.

III.

Lignes de courbure des surfaces de révolution.

L'équation différentielle partielle de toutes les surfaces de révolution est, en faisant coïncider l'axe de révolution avec celui des z. (M. p. 15),

$$py - qx = 0 \;.\;.\;.\; (1)$$

Différentiant partiellement cette équation d'abord par rapport à x, puis par rapport à y, on a :

$$ry - q - sx = 0 \;.\;.\;.\; (2)$$

$$tx - p - sy = 0 \;.\;.\;.\; (3)$$

Substituant dans l'équation générale (A) des lignes de courbure pour r et t leurs valeurs tirées de (2 et 3) et réduisant au moyen de(1), on trouve que tous les termes de l'équation (A) sont divisibles par le facteur $\left(s - \frac{p^2q}{x}\right)$ ou par son égal $\left(s - \frac{pq^2}{y}\right)$ et que l'équation des lignes de courbure des surfaces de révolution peut être mise sous la forme :

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{x^2 - y^2}{yx}\right) - 1 = 0, \text{ ou bien}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) - 1 = 0$$

Sans résoudre cette équation on reconnaît que les valeurs des deux racines de $\frac{dy}{dx}$ sont respectivement:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}\\[2ex] \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\end{array}\right\}\text{ dont les intégrales sont en désignant par } \alpha \text{ et } \beta \text{ deux constantes arbitraires }\left\{\begin{array}{l}y^2+x^2=\alpha\\[2ex] y=\beta x\end{array}\right.$$

Or $y^2+x^2=\alpha$, est l'équation d'un cylindre de révolution autour de l'axe des z; donc l'une des lignes de courbure est l'intersection de ce cylindre avec la surface de révolution proposée, intersection qui ne peut être qu'un *parallèle;* vu que deux surfaces de révolution qui ont même axe ne sauraient se couper que dans un parallèle.

L'autre ligne de courbure a pour équation $y=\beta x$, laquelle est celle d'un plan vertical passant par l'axe des z, c'est-à-dire, par l'axe de révolution; donc l'autre ligne de courbure est l'intersection de ce plan avec la surface de révolution et par suite un *méridien.*

IV.

Lignes de courbure des surfaces des canaux et des surfaces dont la ligne de plus grande pente est une droite d'inclinaison constante.

L'équation différentielle partielle qui exprime une propriété commune à toutes les surfaces engendrées par le mouvement d'une sphère constante de rayon et dont le centre suit une courbe arbitrairement tracée dans le plan des xy, est en désignant par a le rayon de la sphère, (M. p. 32)

$$z^2(1+p^2+q^2)=a^2, \text{ ou bien } z^2k^2=a^2 \ldots (1)$$

en posant pour abréger $(1+p^2+q^2)=k^2$.

Différentiant deux fois partiellement cette équation on a :

$$pr+qs=-\frac{k^2}{z}p \ldots (2).$$

$$ps+qt=-\frac{k^2}{z}q \ldots (3).$$

Avant de faire la substitution de, r, s, t, dans l'équation générale (A) des lignes de courbure, il convient de préparer celle-ci de manière à faire entrer la quantité k^2 dans chacun de ses termes, alors elle devient

$$\frac{dy^2}{dx^2}\Big[k^2s-p(ps+qt)\Big]+\frac{dy}{dx}\Big[k^2(r-t)-(p^2r-q^2t)\Big]-\Big[k^2s-q(pr+qs)\Big]=0.$$

Et si maintenant l'on y substitue pour $(ps+qt)$, $(pr+qs)$, $(r-t)$, (p^2r-q^2t) leurs valeurs tirées de (2, 3), tous ses termes deviendront divisibles par le facteur $\left(s+\dfrac{pq}{z}\right)k^2$, et l'on aura

$$\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left(\frac{p^2-q^2}{pq}\right)-1=0.$$

Telle est l'équation des lignes de courbure des surfaces des canaux. Si on la résout par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on trouve que la quantité sous le radical est un carré parfait et que les deux lignes de courbure ont respectivement pour équation

$$pdy-qdx=0,\ pdx+qdy=0.$$

Or la première est l'équation de la caractéristique de la surface (M. p. 56); donc tout plan vertical perpendiculaire à l'axe du canal, c'est-à-dire, à la ligne que suit le centre de la sphère génératrice, coupe la surface suivant une ligne de courbure.

L'équation $pdx+qdy=0$ de l'autre ligne de courbure, à cause de $pdx+qdy=dz$, devient $dz=0$ ou $z=\beta$, qui représente un plan horizontal. Donc l'autre ligne de courbure de la surface des canaux est l'intersection de la surface proposée par un plan horizontal.

En traitant de la même manière l'équation $p^2+q^2=a^2$, qui est celle des surfaces dont la ligne de plus grande pente est une droite d'inclinaison constante (M. p. 45), on arriverait à conclure que l'une des lignes de courbure, qui passe par chaque point de ces surfaces, coïncide avec la caractéristique et que l'autre coïncide avec la section horizontale qui passe par le même point.

V.

Lignes de courbure de toutes les surfaces développables.

L'équation différentielle partielle du second ordre de toutes les surfaces développables est (M. p. 82)

$$rt-s^2=0.$$

L'équation générale des lignes de courbure deviendra celle des lignes de courbure des surfaces développables, en y introduisant la condition de $rt-s^2=0$.

Or, en remplaçant dans l'équation (A) rt par s^2 et posant, pour abréger, $qs-pt=m$, on parvient sans peine à la mettre sous la forme.

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left(s+qm\right)t+\frac{dy}{dx}\Big[s(s+qm)-t(t-pm)\Big]-s(t-pm)=0\,;$$

et en la résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$ on trouve encore ici que la quantité sous le radical est un carré parfait, et l'on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-s(s+qm)+t(t-pm)\pm\left[s(s+qm)+t(t-pm)\right]}{2t(s+qm)}\ldots(\mathrm{B}).$$

En prenant le signe —, il vient pour l'équation de l'une des lignes de courbure.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{s}{t},\text{ ou bien, } sdx+tdy=0,\text{ ou bien, } dq=0$$

et à cause que cette ligne est en entier sur la surface proposée on a aussi : $rt-s^2=0$, qui devient, à cause de la précédente: $rdx+sdy=0$ ou bien, $dp=0$.

Donc on a pour l'une des lignes de courbure les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} dp=0 \\ dq=0 \end{array}\right\}\text{ dont les intégrales sont, } \alpha \text{ étant une constante arbitraire: } \left\{\begin{array}{l} p=\alpha \\ q=\varphi(\alpha) \end{array}\right.$$

Substituant ces valeurs de p et de q dans $dz=pdx+qdy$ et intégrant l'on a

$$z=\alpha x+\varphi(\alpha)y+\pi(\alpha)\quad\ldots\quad(1)$$

$\pi(\alpha)$ étant une fonction arbitraire de la quantité α que l'on a considérée comme constante dans l'intégration.

Différentiant (1) par rapport à α seul, il vient

$$0=x+\varphi'(\alpha)y+\pi'(\alpha)\quad\ldots\quad(2)$$

et l'une des lignes de courbure sera représentée par le système des équations (1 et 2), qui expriment que cette ligne est une droite et par suite ne peut être qu'une génératrice de la surface proposée ; conséquence à laquelle on arriverait d'ailleurs en faisant subsister les équations (1 et 2) avec l'intégrale de l'équation $rt-s^2=0$.

Ayant reconnu que les génératrices d'une surface développable sont toutes des lignes de première courbure, et sachant d'ailleurs que les deux systèmes de lignes de courbure d'une même surface doivent se couper à angle droit, il ne serait pas difficile de conclure, que les lignes de seconde courbure d'une surface développable doivent être des développantes de l'arrête de rebroussement. Mais il est curieux de rechercher si le calcul peut conduire à la même conclusion.

Prenant maintenant le signes + dans (B); nous aurons pour équation de la seconde ligne de courbure

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t-pm}{s+qm}$$

qui devient, en remettant pour m sa valeur $(qs-pt)$ et pour $pdx+qdy$ sa valeur dz

$$s(dy+qdz)=t(dx+pdz)\quad\ldots\quad(1)$$

On a de plus pour la même ligne l'équation $rt - s^2 = 0$, qui est celle de la surface proposée sur laquelle cette ligne existe tout entière, et qui devient à cause de la précédente

$$r(dy + qdz) = s(dx + pdz) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ces deux équations, qui appartiennent à la même courbe, sont équivalentes à celles de deux de ses projections,

et en y joignant l'équation

$$dz = pdx + qdy \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

résultant de la définition des quantités p et q, on aura trois équations pour la même courbe, qui équivaudront à celles de trois de ses projections, et dont deux quelconques suffiront pour la déterminer.

Substituons dans (1 et 2) la valeur de dz tirée de (3) nous aurons

$$dy\left[(1+q^2)s - pqt\right] = dx\left[(1+p^2)t - pqs\right]$$

$$dy\left[(1+q^2)r - pqs\right] = dx\left[(1+p^2)s - pqr\right]$$

En posant $(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = h$ et tirant de là successivement les valeurs de $(1+q^2)r$ et de $(1+p^2)t$ pour les substituer dans les deux équations qui précèdent, il vient, en observant que $rdx + sdy = dp$ et $sdx + tdy = dq$

$$hdx = (1+q^2)dp - pqdq \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

$$hdy = (1+p^2)dq - pqdp \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

et l'équation (3) devient au moyen de ces deux

$$hdz = pdp + qdq \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

remplaçons maintenant h par sa valeur tirée de l'expression qui donne les deux rayons de courbure des surfaces développables ; cette expression est pour les surfaces développables, en faisant $1 + p^2 + q^2 = k^2$ et en conservant à h la même valeur que ci-dessus (M. p. 112),

$$R = \frac{-2k^3}{h \pm h}$$

des deux valeurs de R, fournies par cette équation, une est infinie et ne peut convenir qu'aux lignes de moindre courbure qui sont, comme nous l'avons trouvé, des lignes droites ou génératrices de la surface. La seconde valeur de R, qui est $-\frac{k^3}{h}$ et qui donne $h = -\frac{k^3}{R}$, est donc la seule pouvant convenir à la ligne de plus grande courbure qui nous occupe. En substituant pour h sa valeur $-\frac{k^3}{R}$, les équations (1′,2′,3′) deviennent respectivement

$$dx = -R\left[\frac{(1+q^2)\,dp - pq\,dq}{k^3}\right]$$

$$dy = -R\left[\frac{(1+p^2)\,dq - pq\,dp}{k^3}\right]$$

$$dz = -R\left[\frac{pdp + qdq}{k^3}\right]$$

Or les quantités entre parenthèses étant des différentielles exactes, ces équations peuvent être mises sous la forme

$$dx = -R\,d\frac{p}{k}$$

$$dy = -R\,d\frac{q}{k}$$

$$dz = R\,d\frac{1}{k}.$$

Comme ces équations sont les mêmes que celles trouvées par Monge (M. p. 177) pour la caractéristique de la surface dont les deux rayons de courbure, en chaque point, sont égaux entre eux, et dirigés du même côté, nous n'avons, pour ainsi dire qu'à transcrire littéralement le procédé suivi par Monge pour les intégrer, en remplaçant l'expression caractéristique par celle de ligne de courbure.

Les trois équations précédentes seraient des différentielles exactes, si le rayon de courbure R était une quantité constante, et alors leurs intégrales seraient complétées par des arbitraires, qui étant toutes trois constantes pour la même ligne de courbure individuelle, et variables d'une ligne de courbure à sa consécutive, seraient fonctions d'une même quantité α, qui particularise la position de cette ligne. Mais le rayon de courbure R n'est pas constant. Si donc on intègre ces équations en regardant R comme constant, il faut que les arbitraires soient non-seulement fonctions de la quantité α, mais encore de R, et que ces fonctions soient telles que les différentielles de chaque équation prises en regardant successivement α et R comme seules variables aient lieu. Représentant donc par φ, ψ et ϖ trois fonctions arbitraires de α et de R, on aura

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{pR}{k} + \varphi(R, \alpha) \\ y &= -\frac{qR}{k} + \psi(R, \alpha) \\ z &= \frac{R}{k} + \varpi(R, \alpha) \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

ces trois fonctions devant satisfaire aux deux systèmes d'équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{k} &= \varphi' \\ \frac{q}{k} &= \psi' \\ -\frac{1}{k} &= \varpi' \end{aligned}\right\} \ldots (2) \qquad \left.\begin{aligned} \varphi'' &= 0 \\ \psi'' &= 0 \\ \varpi'' &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

qui résultent de la différentiation des trois précédentes opérée en regardant successivement R et α comme seules variables. Or les trois équations $\varphi'' = 0$, $\psi'' = 0$, $\varpi'' = 0$ expriment que α n'entre dans aucune des fonctions ; par conséquent si nous regardons désormais les trois fonctions arbitraires φ, ψ, ϖ comme composées de la seule quantité R, ces trois équations seront satisfaites. Quant aux trois autres équations de condition, si l'on fait la somme de leurs carrés, on trouvera

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \varpi'^2 = 1$$

d'où l'on tirera $$\varpi' = \sqrt{(1 - \varphi'^2 - \psi'^2)}$$

et par conséquent $$\varpi = \int dR \sqrt{(1 - \varphi'^2 - \psi'^2)}$$

qui tiendra lieu de l'une des trois équations de condition restantes, par exemple de la dernière, et qui servira à déterminer la forme de la fonction surabondante ϖ, d'après celle des deux autres. Quoique cette fonction ϖ soit déterminée, nous la conserverons néanmoins encore pour abréger les expressions.

Les six équations (1 et 2) deviennent donc

$$\begin{aligned} x - \varphi(R) &= \frac{-pR}{k} & \frac{p}{k} &= \varphi'(R) \\ y - \psi(R) &= \frac{-qR}{k} & \frac{q}{k} &= \psi'(R) \\ z - \varpi(R) &= \frac{R}{k} & \varpi &= \int dR \sqrt{(1 - \varphi'^2 - \psi'^2)} \end{aligned}$$

lesquelles, par l'élimination de $\frac{p}{k}$, $\frac{q}{k}$ et en chassant la fonction ϖ, se réduisent aux trois équations suivantes :

$$(x-\varphi)^2+(y-\psi)^2+\left[z-\int dR\sqrt{(1-\varphi'^2-\psi'^2)}\right]^2=R^2$$

$$x=\varphi-R\,\varphi'$$

$$y=\psi-R\,\psi'$$

et l'élimination de l'indéterminée R entre ces trois équations produira en x, y, z et deux fonctions arbitraires, deux équations qui seront équivalentes à celles des deux projections de la ligne de courbure.

Pour connaître la signification géométrique du résultat de l'élimination de l'indéterminée R, nous donnerons aux trois équations une autre forme.

Des quatre quantités R, φR, ψR, πR, dont les trois dernières sont d'ailleurs liées entre elles par l'équation $\varphi'^2+\psi'^2+\pi'^2=1$, trois étant fonctions de la quatrième, on peut indifféremment prendre celle d'entre elles que l'on voudra pour quantité principale et regarder les trois autres comme fonctions de cette dernière.

D'après cela, soient $\pi R=\alpha$, $\varphi R=\Phi\alpha$, $\psi R=\Psi\alpha$, les caractères Φ, Ψ indiquant de nouvelles fonctions arbitraires, nous aurons

$$\left(\varphi'^2+\psi'^2+\pi'^2\right)dR^2=\left(1+\Phi'^2+\Psi'^2\right)d\alpha^2$$

d'où l'on tire

$$dR=d\alpha\sqrt{(1+\Phi'^2+\Psi'^2)},\ \text{et}\ R=\int d\alpha\sqrt{(1+\Phi'^2+\Psi'^2)}$$

substituant toutes ces valeurs, nous aurons à la place des trois équations précédentes les trois autres équivalentes

$$(x-\Phi\alpha)^2+(y-\Psi\alpha)^2+(z-\alpha)^2=\left[\int d\alpha\sqrt{(1+\Phi'^2+\Psi'^2)}\right]^2$$

$$x-\Phi\alpha=(z-\alpha)\,\Phi'\alpha$$

$$y-\Psi\alpha=(z-\alpha)\,\Psi'\alpha$$

qui, par l'élimination de la nouvelle indéterminée α, produiront également en x, y, z les deux équations de la ligne de courbure.

La première de ces équations est celle de la surface d'une sphère qui aurait son centre sur une courbe arbitraire, dont les projections auraient pour équations $x=\Phi z$, $y=\Psi z$, le centre étant au point de la courbe correspondant à $z=\alpha$, et son rayon variable étant égal à l'arc de la courbe, compris entre le centre et un autre point constant pris sur la courbe pour origine. Les deux autres équations sont celles des projections d'un diamètre de la sphère tangent à la courbe. Il est évident que pour une même valeur de α, ces trois équations appartiennent au point d'intersection de la surface sphérique et du diamètre tangent à la courbe, et par conséquent à la développante de celle-ci.

D'un autre côté le diamètre de la sphère mobile engendre une surface développable dont la courbe $x = \Phi z$, $y = \Psi z$ est l'arête de rebroussement et dont les génératrices sont toutes perpendiculaires à la développante (ligne de courbure à déterminer).

Ainsi l'analyse présente la seconde ligne de courbure comme étant la développante de l'arrête de rebroussement d'une surface développable quelconque dont les génératrices sont perpendiculaires à cette développante.

Or la surface développable proposée jouit de cette propriété ; car toutes ses génératrices, étant des lignes de première courbure, comme il a été démontré, coupent à angle droit une ligne quelconque de seconde courbure.

Donc toute ligne de seconde courbure d'une surface développable quelconque peut être regardée comme étant la développante de l'arête de rebroussement de cette surface développable.

D'après cela l'analyse nous paraît impuissante pour déterminer les lignes de seconde courbure sans connaître au préalable les lignes de première courbure. Nous n'avons d'ailleurs pas trouvé moyen de déterminer la forme des fonctions Φ, Ψ qu'il faudrait connaître pour construire la développante de la courbe $x = \Phi z$, $y = \Psi z$.

VI.

Note sur une propriété relative à l'hyperboloïde à une nappe et au paraboloïde hyperbolique.

L'équation de l'hyperboloïde à une nappe, rapporté à ses axes et à son centre, est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \ . \ . \ (1)$$

Si l'on coupe cet hyperboloïde par une sphère concentrique ayant pour rayon $\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}$, je dis que les deux rayons de courbure de l'hyperboloïde en chaque point de la courbe d'intersection, sont égaux et de signes contraires.

Pour que les deux rayons de courbure en un point d'une surface soient égaux et de signes contraires, il faut que les coordonnées de ce point vérifient l'équation différentielle partielle suivante (M. p. 184):

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0 \quad . \ . \ . \ (2)$$

L'équation (1) différentiée partiellement donne successivement

$$p = \frac{c^2 x}{a^2 z}, \qquad q = \frac{c^2 y}{b^2 z},$$

$$r = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(b^2 - y^2), \quad s = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3} xy, \quad t = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(a^2 - x^2)$$

en substituant ces valeurs de p, q, r, s, t dans (2), on aura une équation en x, y, z, qui sera celle d'une surface ; et si cette surface peut couper celle de l'hyperboloïde, il en résultera qu'en tous les points de la courbe d'intersection, la surface de l'hyperboloïde jouit de la propriété énoncée.

L'équation (2), en y substituant d'abord les valeurs de r, s, t, est divisible par le facteur $\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}$ et devient

$$-(1 + q^2)(b^2 - y^2) + 2pqxy - (1 + p)(a^2 - x^2) = 0, \text{ ou bien}$$

$$y^2 + x^2 - (a^2 + b^2) + (px + qy)^2 - (a^2 p^2 + b^2 q^2) = 0,$$

qui devient, en y mettant à la place de p et de q leurs valeurs,

$$y^2 + x^2 - (a^2 + b^2) + \frac{c^4}{z^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 - \frac{c^4}{z^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0.$$

En observant que d'après (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$

l'équation précédente se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

Ainsi les points de l'hyperboloïde, qui jouissent de la propriété énoncée, se trouvent sur une sphère concentrique à l'hyperboloïde et dont le rayon $= \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}$; ce qu'il s'agissait de prouver.

Cherchons maintenant le lieu géométrique des points du paraboloïde hyperbolique en chacun desquels les deux rayons de courbure sont égaux et de signes contraires.

L'équation du paraboloïde hyperbolique rapporté à son sommet et à ses plans principaux est :

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + 2z = 0 \quad . \; . \; . \quad (1).$$

a et b étant les deux demi-paramètres des paraboles principales.

En différentiant partiellement cette équation (1) on a successivement :

$$p = -\frac{x}{a} \qquad q = \frac{y}{b}$$

$$r = -\frac{1}{a}, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{b}$$

en mettant ces valeurs dans l'équation de condition

$$(1+q^2)\,r - 2\,pqs + (1+p^2)\,t = 0$$

elle devient

$$\left(1+\frac{x^2}{\ }\right)\frac{1}{b} - \left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{1}{a} = 0$$

et se réduit en vertu de (1) à

$$2z = a - b.$$

Cette équation montre que les points du paraboloïde hyperbolique, en chacun desquels les deux rayons de courbure sont égaux et de signes contraires, sont dans un plan horizontal situé au dessus ou au dessous de celui des xy, selon que $a >$ ou $< b$.