APPLICATIONS

DES

PROJECTIONS COTÉES

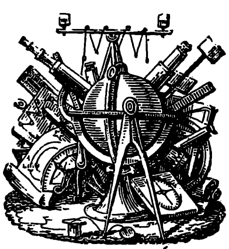
A DIVERSES RECHERCHES

SUR L'ÉTENDUE,

PAR

J.-B. BRASSEUR,

PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.



LIÉGE.

A. JEUNEHOMME, IMPRIMEUR-LIBRAIRE, QUAI DE LA SAUVENIÈRE, 10.

1841.

APPLICATIONS

DES

PROJECTIONS COTÉES A DIVERSES RECHERCHES SUR L'ÉTENDUE.

§ I.

PRINCIPES.

1. — *Le rapport de la différence entre les cotes de deux points quelconques d'une même droite à la distance, qui sépare les projections de ces deux points, est une quantité constante;* de sorte que, si $abcd$... etc. est la projection d'une droite, α, β, γ, δ, etc. étant les cotes des points projetés respectivement en a, b, c, d, etc., on aura :

$$ab : \alpha - \beta = bc : \beta - \gamma = cd : \gamma - \delta = \text{etc.}$$

2. — *Les diverses portions d'une même droite de l'espace sont proportionnelles à leurs projections sur un plan quelconque;* de sorte que, si $a\,b\,c\,d$... etc. est la projection d'une droite quelconque, on aura :

$$(ab) : ab = (bc) : bc = (cd) : cd = \text{, etc.}$$

(ab), (bc), (cd), etc., désignant les diverses parties de la droite dans l'espace, et ab, bc, cd, etc., les projections respectives de ces mêmes parties.

— Des deux proportions précédentes on déduit cette troisième :

$$(ab) : \alpha - \beta = (bc) : \beta - \gamma = (cd) : \gamma - \delta = \text{etc.}$$

3 — Qui signifie que *le rapport d'une portion quelconque d'une même droite de l'espace à la différence des cotes des extrémités de cette portion est une quantité constante.*

4. Nous dirons que deux droites dans l'espace sont *pareillement* cotées, ou sont divisées en parties pareillement cotées, lorsqu'on aura marqué sur ces droites des points ayant deux à deux même cote.

5. — *Deux horizontales sont parallèles dans l'espace et par suite situées dans un même plan, lorsque leurs projections sont parallèles, et réciproquement.*

6. — *Deux droites de l'espace se rencontrent et par suite sont situées dans un même plan, si deux horizontales quelconques, s'appuyant sur ces deux droites, sont parallèles.*

7. — *Une droite et une horizontale se rencontrent dans l'espace, si le point de rencontre de la projection de la droite avec la projection de l'horizontale a même cote que l'horizontale.*

8. — *Si deux droites sont parallèles dans l'espace, leurs projections sont parallèles; les cotes dans l'ordre de leur grandeur se comptent dans le même sens sur les deux projections; et une division quelconque de l'une des projections est égale à la division pareillement cotée de l'autre projection; et réciproquement.*

9. — *Deux droites quelconques, égales et parallèles tracées dans le plan horizontal, peuvent toujours être prises pour les projections de deux droites parallèles dans l'espace; il suffit pour cela que les extrémités de ces droites soient pareillement cotées, et que les cotes sur les deux droites se comptent dans le même sens.*

10. — *Lorsque deux ou plusieurs droites $a\,b\,c\,d$.. etc., $a'b'c'd'$.. etc. sont divisées en parties respectivement proportionnelles, de manière que l'on a :*

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.}$$

Nous nommerons points correspondants les points tels que a et a', b et b', c et c', etc.

§ II.

Propriétés.

11. — *Les divisions de deux ou plusieurs droites pareillement cotées sont respectivement proportionnelles, et il en est de même des divisions des projections de ces droites.*

Démonstration. — Soit, $a\,b\,c\,d$.. etc. la projection d'une première droite; les points projetés en a, b, c, d, etc. ayant respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc. on aura d'après (1)

$$ab : \alpha - \beta = bc : \beta - \gamma = cd : \gamma - \delta = \text{etc.}$$

Soit $a'b'c'd'$.. etc. la projection d'une seconde droite; les points projetés en a', b', c', d', etc., ayant également pour cotes respectives α, β, γ, δ, etc.; on aura de même d'après (1)

$$a'b' : \alpha - \beta = b'c' : \beta - \gamma = c'd' : \gamma - \delta = \text{etc.}$$

De ces deux égalités, on déduit :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.}.$$

Et par suite : $(ab) : (a'b') = (bc) : (b'c') = (cd) : (c'd') = \text{etc.}$ *C. Q. F. D.*

12. — *Réciproquement. — Deux droites quelconques, tracées dans le plan horizontal et divisées en parties respectivement proportionnelles, peuvent être prises pour les projections de deux droites de l'espace pareillement cotées. — Pour cela, il suffit de donner à deux points de divisions quelconques de la première droite des cotes quelconques et aux deux points de division correspondants de la seconde respectivement mêmes cotes.*

Démonstration. — Soit $abcd$.. etc. la première droite, $a'b'c'd'$.. etc. la seconde droite; on donne : $ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.}...$ (1).

Considérant ces droites comme projections de deux droites de l'espace, soient α, β, x les cotes de trois points de la première projetés respectivement en a, b, c, et soient α, β, x', les cotes de trois points de la seconde projetés respectivement en a', b', c', correspondants de a, b, c; il s'agit de prouver que $x = x'$.

De ce que α, β, x, sont les cotes de trois points d'une même droite, on a d'après (1)

$$ab : \alpha - \beta = bc : \beta - x$$

On aura de même : $$a'b' : \alpha - \beta = b'c' : \beta - x'.$$

De là, et à cause de l'égalité (1), on conclut que $x = x'$.

13. — *Corol.* — *Tant d'horizontales que l'on voudra, qui s'appuient sur deux droites quelconques de l'espace, divisent celles-ci en parties proportionnelles; et d'après* (11) *les projections des mêmes horizontales divisent également les projections des deux droites en parties proportionnelles.* Car ces horizontales rencontrent les deux droites en des points qui ont deux à deux même cote, et par suite ces droites sont pareillement cotées.

§ III.

14. — *Définition* — *Nous dirons que deux systèmes de parallèles de direction différente, tracées sur un même plan, sont proportionnellement espacées, lorsque les parallèles du premier système interceptant sur une transversale des parties quelconques, les parallèles du second système interceptent sur la même transversale ou sur une transversale différente des parties respectivement proportionnelles.*

15. — *Dans deux systèmes de parallèles proportionnellement espacées, les parallèles du premier système rencontrent respectivement leurs correspondantes du second en tous points qui sont en ligne droite.*

Soient (fig. 8) $abcd$ .. etc., $a'b'c'd'$ .. etc., deux transversales qui sont divisées respectivement par les deux systèmes de parallèles p et p', de manière que l'on a :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{cet.}$$

A cause de cette proportion on peut prendre (12) les deux transversales pour les projections de deux droites de l'espace pareillement cotées. D'un autre côté si l'on considère les parallèles p comme étant les projections d'autant d'horizontales d'un même plan passant par la droite de l'espace projetée dans la première transversale ; et les parallèles p' comme étant les projections d'autant d'horizontales d'un second plan passant par la droite de l'espace projetée dans la seconde transversale : ces horizontales auront deux à deux même cote comme s'appuyant respectivement sur deux droites de l'espace pareillement cotées et elles devront se rencontrer deux à deux sur la droite d'intersection des deux plans mentionnés ; donc aussi les projections de ces horizontales, c'est-à-dire les parallèles proposées devront se rencontrer deux à deux en tous points qui sont en ligne droite.

§ IV.

Double génération du paraboloïde hyperbolique.

16. — Le paraboloïde hyperbolique est engendré par une droite qui se meut parallèlement à un plan donné, appelé *plan directeur*, en s'appuyant sur deux droites données, appelées *directrices*.

Les deux directrices ne doivent pas être situées dans un même plan, et aucune ne doit être parallèle au plan directeur ; de là suit :

Que le paraboloïde est une surface gauche ; car si deux génératrices consécutives infiniment voisines et même deux génératrices quelconques étaient dans un même plan, les deux directrices seraient dans ce même plan ;

Que deux génératrices quelconques ne peuvent pas être parallèles à un même plan autre que le plan directeur ; autrement elles seraient toutes deux parallèles à l'intersection de ce plan avec le plan directeur, et par suite dans un même plan comme parallèles entre elles.

La démonstration de la double génération du paraboloïde hyperbolique se réduit à prouver que tout plan sécant, parallèle aux deux directrices, rencontre toutes les génératrices en tous points en ligne droite ; et comme ces points de rencontre sont déjà dans un même plan, qui est le plan sécant, il suffira de prouver que leurs projections sont en ligne droite.

Pour faciliter la construction des génératrices et de leurs points de rencontre avec le plan sécant, nous prendrons le plan directeur pour plan horizontal de projection ; alors toutes les génératrices étant des horizontales, la construction d'une génératrice revient à joindre par une droite deux points de même cote, pris respectivement sur les deux directrices, et la construction de son point de rencontre avec le plan sécant revient à construire dans celui-ci une horizontale ayant même cote que la génératrice, l'intersection de cette horizontale avec la génératrice sera le point cherché.

EPURE, (*Fig.* 7).

— d, d', sont les projections cotées des deux directrices.

g^1, g^2, g^3, sont les projections de trois génératrices horizontales ayant respectivement pour cote, 1, 2, 3.

— δ, δ', sont les projections cotées de deux droites auxiliaires, menées par un même point de la génératrice (g^1) et respectivement parallèles aux directrices (d), (d').

— bb', cc' sont les projections de deux horizontales du plan qui passe par (δ) et (δ'), et ayant respectivement mêmes cotes 2, 3, que les génératrices (g^2), (g^3).

— Les points b'', c'', sont les projections des points de rencontre des génératrices (g^2), (g^3) avec les horizontales (bb'), (cc)', c'est-à-dire, avec le plan qui passe par (δ, δ').

Il faut prouver maintenant que les projections a, b'', c'', des points dans lesquels les trois génératrices sont rencontrées par le plan (δ, δ') sont en ligne droite.

A cause que les droites (d) et (δ) sont parallèles, et par suite situées dans un même plan, les droites M et M', pointillées sur l'épure, sont toutes deux parallèles à g^1, comme projections de deux horizontales de ce plan.

De même, à cause que les droites (d') et (δ') sont parallèles et par suite situées dans un même plan les droites m et m', représentées par de petits traits, sont également parallèles à g^1 comme projections de deux horizontales de ce plan ; et l'on a : $M = M'$ et $m = m'$, comme parallèles comprises entre parallèles.

A cause du parallélisme des deux droites, $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ et } m, \text{ on a : } M : m = bb'' : b'b''. \\ M' \text{ et } m', \text{ on a : } M' : m' = cc'' : c'c''. \end{array} \right.$

Ces deux égalités, à cause de $M = M'$, et de $m = m'$, donnent :

$$bb'' : b'b'' = cc'' : c'c''... (1).$$

Enfin du parallélisme de bb' et de cc' et de l'égalité (1) on déduit facilement par l'absurde que les trois points a, b'', c'', sont en ligne droite.

17. — *Corol* 1. — *Une droite qui rencontre deux génératrices et qui est parallèle à un plan parallèle aux deux directrices rencontre toutes les autres génératrices du paraboloïde.*

Car par cette droite on pourra mener un plan parallèle aux deux directrices, qui coupera la surface suivant une ligne droite, laquelle coïncidera avec la droite proposée comme ayant deux points de commun avec elle.

Donc la surface peut aussi être engendrée par une droite qui se meut sur deux génératrices en restant toujours parallèle à un plan parallèle aux deux directrices.

La surface a donc deux générations distinctes par le mouvement d'une droite et deux plans directeurs différents.

Le paraboloïde hyperbolique est dit droit lorsque ses deux plans directeurs se coupent à angle droit.

18.— *Corol* 2.—Puisqu'un plan quelconque parallèle aux deux directrices, coupe toutes les génératrices en ligne droite, il s'en suit que *par chaque point d'une génératrice quelconque, on peut toujours mener une droite qui rencontre toutes les autres générations;* mais on n'en peut pas mener deux, autrement toutes les génératrices seraient situées dans le plan de ces deux droites.

19.— *Corol.* 3.— *Une droite qui rencontre trois génératrices les rencontre toutes;* car si par le point ou la droite proposée coupe l'une des trois génératrices, on mène une seconde droite qui rencontre toutes les génératrices de la surface, cette seconde droite devra coïncider avec la première; autrement deux des trois génératrices proposées seraient dans le plan de ces deux droites.

20. — *Corol.* 4. — *Tout plan qui passe par une génératrice, sans être parallèle au plan directeur, coupe toutes les autres génératrices en tous points qui sont en ligne droite;* car joignant par une droite les points dans lesquels deux autres génératrices quelconques sont rencontrées par ce plan, cette droite rencontrera, outre ces deux génératrices, la génératrice proposée; et partant toutes les génératrices.

21.— *Corol.* 5. — *Toutes les génératrices de l'un des modes de génération divisent toutes les génératrices de l'autre mode de génération en parties proportionnelles. La même propriété a lieu pour les projections de ces génératrices sur un plan quelconque.*

En prenant l'un des deux plans directeurs pour plan horizontal de projection, toutes les génératrices seront des horizontales, qui diviseront les génératrices du second mode de génération en parties pareillement cotées; donc ces parties sont proportionnelles dans l'espace (11), et par suite leurs projections sur un plan quelconque jouissent de la même propriété.

§ V.

22. — *Autre démonstration de la propriété sur laquelle repose la double génération du paraboloïde hyperbolique.*

Prenons le plan directeur pour plan horizontal de projection, alors toutes les génératrices seront horizontales ; et supposons que l'une des deux directrices soit perpendiculaire au plan directeur, ce qui fera que sa projection sur ce plan se réduira à un point par lequel passeront les projections de toutes les génératrices; cela posé,

Soit S (fig. 6) la projection de la directrice verticale et $a\,b\,c\,d$.. etc. la projection de l'autre directrice, les points projetés en a, b, c, d, etc., ayant respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc.; d'après (1) on a :

$$ab : \alpha - \beta = bc : \beta - \gamma = cd : \gamma - \delta = \text{etc}\ldots \text{ (1).}$$

Sa, Sb, Sc, Sd, etc., étant prises pour les projections d'autant d'horizontales ayant respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc., seront les projections d'autant de génératrices du paraboloïde.

Toute droite $a'b'c'd'$.. etc. parallèle à $a\,b\,c\,d$.. etc. peut-être prise pour la projection d'un plan vertical, parallèle à la fois aux deux directrices; cela posé, le plan vertical $a'b'c'd'$.. etc. rencontre les diverses génératrices aux points projetés respectivement en a', b', c', d', etc. et dont les cotes respectives sont α, β, γ, δ, etc.

Il s'agit de prouver que ces divers points sont en ligne droite, c'est-à-dire que l'on a

$$a'b' : \alpha - \beta = b'c' : \beta - \gamma = c'd' : \gamma - \delta = \text{etc}\ldots \text{ (2).}$$

Or, la figure donne à cause du parallélisme de $a\,b\,c\,d$.. etc. et de $a'b'\,c'd'$.. etc. :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc}\ldots \text{ (3).}$$

Des deux égalités (1), (3) résulte évidemment l'égalité (2) : *C. Q. F. D.*

La démonstration reste la même dans le cas général où les deux directrices ont des positions quelconques par rapport au plan directeur, si, prenant toujours ce dernier pour plan de projection, on se sert d'un système de projection oblique dans lequel plans et droites projetants seront parallèles à l'une des deux directrices.

23. — On arrive encore à une solution élégante de la même propriété, en se servant d'un plan de projection parallèle aux deux directrices.

§ VI.

24. — *Si des droites en nombre quelconque, tracées dans le plan horizontal, interceptent sur deux transversales des parties respectivement proportionnelles, alors*

1° *Trois quelconques de ces droites ne passent pas par un même point; à moins que les deux transversales ne soient parallèles, auquel cas toutes les droites passent par ce même point.*

2° *Deux droites quelconques ne sont pas parallèles; à moins que les deux transversales ne* *soient divisées proportionnellement à partir de leur point d'intersection , auquel cas toutes les droites sont parallèles.*

3° *Toutes les droites moins une, interceptent encore sur celle-ci des parties respectivement proportionnelles aux parties qu'elles interceptent sur l'une quelconque des deux transversales proposées.*

Démonstration. — Nous nous bornons à démontrer la dernière de ces propriétés , les autres étant évidentes ou très-faciles à établir.

Soient (fig. 3) $a\ b\ c\ d$.. etc., $a'\ b'c'\ d'$.. etc. deux transversales tracées dans le plan horizontal; aa', bb', cc', dd', etc. un certain nombre de droites qui divisent les deux transversales de manière que l'on a :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc}... \ (1).$$

Il faut prouver que l'on a aussi :

$$b''b'' : b'c' : b\ c = c''d'' : c'd' : cd = \text{etc}... \ (2).$$

A cause de l'égalité (1) et d'après (12) nous pouvons prendre les deux transversales pour les projections de deux droites de l'espace pareillement cotées, de sorte que si nous nommons α, β, γ, δ, etc., les cotes des points projetés respectivement en a, b, c, d, etc.; α, β, γ, δ, etc., seront aussi les cotes respectives des points projetés en a', b', c', d', etc.

Si nous prenons maintenant ces deux droites de l'espace pour directrices d'un paraboloïde hyperbolique, ayant le plan horizontal pour plan directeur, les horizontales projetées en aa', bb', cc', dd', etc. et ayant respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc. seront autant de génératrices de ce paraboloïde; et b'', c'', d'', etc. seront les projections des points dans lesquels ces génératrices rencontrent le plan vertical que nous supposons mené par la génératrice (aa').

Comme ces points de rencontre sont d'après (20) en ligne droite dans l'espace et que leurs cotes sont respectivement les mêmes que celles des horizontales (bb'), (cc'), (dd'), etc. il suit que $b''c''d''$.. etc. est la projection d'une droite de l'espace cotée pareillement à l'une des deux proposées ($b\ c\ d$.. etc.), ($b'c'd'$.. etc.) et d'après (11) l'on doit avoir :

$$b''c'' : b'c' : bc = c''d'' : c'd' : cd = \text{etc. } C.\ Q.\ F.\ D.$$

§ VII.

25. *Lemme. Tant de plans que l'on voudra , passant par une même droite, étant donnés, si en un même point de cette droite on construit la ligne de plus grande pente de chacun de ces plans, l'ensemble de ces lignes de plus grande pente constituera un cône à base circulaire,* c'est-à-dire, que les traces horizontales de toutes ces lignes de plus grande pente seront sur une même circonférence de cercle.

Ceci devient évident en construisant les traces d'un certain nombre de plans passant tous par une même droite, et en abaissant d'un même point de cette droite des perpendiculaires sur les traces horizontales de tous ces plans. Nous n'avons cité cette propriété, que pour en déduire une autre assez curieuse, concernant le paraboloïde hyperbolyque, et dont voici l'énoncé :

26. *Si par un point arbitrairement pris sur une génératrice d'un paraboloïde hyperbolique, on abaisse des perpendiculaires sur toutes les autres génératrices, l'ensemble de ces perpendiculaires constituera un cône du second degré, dont la section par le plan directeur sera une circonférence de cercle.*

Démonstration. En prenant le plan directeur pour plan horizontal de projection, toutes les génératrices seront des horizontales, et les perpendiculaires à ces génératrices menées par un point pris sur l'une d'elles seront les lignes de plus grande pente de tous plans passant par ce point et par les diverses génératrices. Il reste à prouver pour établir la propriété énoncée, que tous ces plans se coupent suivant une même droite :

Chaque plan passant par une génératrice coupe d'après (20) la surface suivant une génératrice du second mode de génération, qui doit passer par le point proposé ; or par le point proposé, il ne passe qu'une seule génératrice du second mode de génération ; donc tous ces plans se coupent suivant une seule et même droite.

§ VIII.

Double génération de l'hyperboloïde à une nappe.

27. La démonstration de la double génération de l'hyperboloïde à une nappe, revient à prouver qu'une droite qui rencontre trois génératrices de l'hyperboloïde, rencontre une quatrième quelconque.

On prendra le plan horizontal de projection parallèle à deux des trois directrices de l'hyperboloïde, et l'on supposera la troisième directrice perpendiculaire à ce plan; dans ce cas deux des trois directrices seront des horizontales et la troisième une verticale dont la projection se réduira à un point.

(Lorsque la troisième directrice n'est pas perpendiculaire à un plan parallèle aux deux autres directrices, on ramènera le cas général au cas particulier que nous avons posé, en se servant d'un système de projections, dans lequel les droites et les plans projetants seront parallèles à la troisième directrice.)

Cela fait, on construira trois génératrices respectivement parallèles aux trois directrices. Deux de ces génératrices seront évidemment des horizontales et la troisième une verticale. Ces trois génératrices, nous les appellerons génératrices principales, sans attacher toutefois aucune propriété particulière à cette dénomination.

Après cela on construira une quatrième génératrice quelconque, et l'on prouvera qu'une droite, qui rencontre les trois génératrices principales, rencontre aussi cette quatrième génératrice; c'est-à-dire, que cette droite est dans un même plan avec cette quatrième génératrice. (6)

ÉPURE. (Fig. 2).

Construction des trois directrices. Les droites d^1, d^2, sont les projections des deux directrices horizontales ayant respectivement pour côtes 1, 2, et le point d est la projection de la directrice verticale.

Construction des trois génératrices principales.

De ce que l'une des trois directrices se projette en un point d, la projection d'une génératrice quelconque devra nécessairement passer par ce point d. De plus on sait que deux horizontales sont dans un même plan, lorsqu'elles sont parallèles ou lorsqu'elles ont même cote; d'après cela,

La droite g^1, passant par le point d et parallèle à d^2, sera la projection d'une première génératrice horizontale, si on lui donne la cote 1 de la directrice horizontale (d^1).

La droite g^2, passant par le point d et parallèle à d^1, sera la projection d'une seconde génératrice horizontale, si on lui donne la cote 2 de la directrice horizontale (d^2).

Enfin le point g est la projection de la génératrice verticale.

Construction d'une quatrième génératrice quelconque.

La droite quelconque f^1k^2, passant par le point d, sera la projection d'une quatrième génératrice, si l'on donne aux points projetés en f^1 et k^2, respectivement pour cotes 1 et 2 (7).

Construction d'une droite s'appuyant sur les trois génératrices principales.

Parce que l'une des trois génératrices principales se projette en un point g, la projection d'une droite quelconque, s'appuyant sur ces trois génératrices principales, devra nécessairement passer par ce point. D'après cela,

La droite quelconque a^2b^1, passant par le point g, sera la projection d'une droite qui rencontre à la fois les trois génératrices (g), (g^1), (g^2), si l'on donne aux points projetés en a^2, b^1, respectivement pour cotes 2 et 1 (7).

Il reste à prouver maintenant que la droite (f^1k^2) et la droite (a^2b^1) sont situées dans un même plan (6).

Or, $(f^1 b^1)$ et $(a^2 k^2)$ sont deux horizontales s'appuyant sur ces deux droites (6), et l'on démontre comme suit que ces deux horizontales sont parallèles:

De ce que d^1 est parallèle à g^2, on a les deux triangles semblables a^2cd, et gcf^1 qui donnent:

$$cd : cf^1 = ca^2 : cg.$$

De ce que d^2 est parallèle à g^1 on a les deux triangles semblables dcb^1 et gck^2 qui donnent:

$$cd : ck^2 = cb^1 : cg.$$

De ces deux proportions on déduit cette troisième:

$$cf^1 : ck^2 = ca^2 : cb^1.$$

Qui prouve que a^2k^2 est parallèle à f^1b^1. Donc les deux droites (f^1k^2) et (a^2b^1) sont dans un même plan et se coupent.

Cette démonstration ne serait peut-être pas assez générale, si l'épure ne faisait voir en même temps, que par un point quelconque (c) d'une génératrice (f^1k^2) quelle qu'elle soit on peut toujours mener une droite, qui rencontre à la fois les trois génératrices principales (g), (g^1), (g^2), et partant toutes les génératrices.

§ IX.

28. *Construire une droite qui rencontre à la fois trois horizontales deux à deux non situées dans un même plan.*

Pour que trois horizontales soient deux à deux non situées dans un même plan, nous ferons observer qu'il suffit qu'elles aient des cotes différentes et que les projections de deux quelconques ne soient pas parallèles.

Solution. Si les trois horizontales ont respectivement pour cotes α, β, γ, la droite les rencontre en trois points ayant respectivement mêmes cotes ; et en désignant par m et n les projections des deux portions de la droite comprises entre les trois horizontales, on aura (1) :

$$m : \alpha - \beta = n : \beta - \gamma, \text{ ou bien }, m : n = \alpha - \beta : \beta - \gamma.$$

La construction de la projection cotée d'une droite quelconque, qui doit rencontrer trois horizontales, revient donc à couper par une droite les projections de ces trois horizontales de telle manière, que le rapport des deux parties de la droite interceptées par les projections des trois horizontales soit égal au rapport connu :

$$\alpha - \beta : \beta - \gamma.$$

29. *Autrement.* Par un point pris sur l'une des trois horizontales j'abaisse des perpendiculaires sur les deux autres ; les projections cotées de ces deux perpendiculaires seront les échelles de pente de deux plans dont l'intersection sera la droite cherchée.

30. *L'hyperboloïde à une nappe, dont les trois directrices sont parallèles à un même plan, est un paraboloïde hyperbolique.*

Solution. Nous prendrons pour plan horizontal de projection un plan parallèle aux trois directrices ; dans ce cas, les directrices seront trois horizontales.

Après avoir construit deux génératrices quelconques, c'est-à-dire, deux droites s'appuyant chacune sur les trois horizontales proposées, il suffira pour construire une troisième génératrice quelconque, de couper les trois horizontales par un plan parallèle aux deux premières génératrices. Ce plan coupera d'après (16) ces trois horizontales en trois points qui sont en ligne droite, et cette droite sera une nouvelle génératrice.

Ainsi toutes les génératrices de la surface sont parallèles à un même plan parallèle aux deux premières génératrices, et par suite la surface est un paraboloïde hyperbolique.

§ X.

31. *Si par tous les points d'une génératrice d'un paraboloïde hyperbolique on mène des plans perpendiculaires à cette génératrice, et des tangentes aux courbes d'intersection de la surface par ces plans, toutes ces tangentes formeront un paraboloïde hyperbolique droit.*

D'abord toutes ces tangentes sont parallèles à un même plan, perpendiculaire à la génératrice proposée ; de plus elles s'appuient toutes sur cette génératrice; il reste donc à trouver, pour établir la propriété énoncée, une seconde droite sur laquelle ces mêmes tangentes s'appuient, ou bien, à trouver un plan qui coupe toutes ces tangentes en ligne droite.

Soient d^1, d^2, d^3 les projections de trois horizontales prises pour directrices du paraboloïde, et supposons, ce qui n'ôte rien à la généralité de la démonstration, que ces horizontales aient respectivement pour cotes 1, 2, 3.

Soient (fig. 5) g, g', g'' les projections de trois génératrices (28, 29), c'est-à-dire, de trois droites s'appuyant chacune sur les trois directrices données.

D'après le corollaire 5, page 5, on a cette suite de rapports égaux :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = \text{etc}\ldots \quad (1).$$

Les plans, qui passent par la directrice (d^2), et par chacune des génératrices $(g), (g'), (g'')$, sont trois plans tangens, dont les points de contact sont respectivement aux points projetés en a, b, c.

Construisons maintenant dans chacun de ces plans une droite qui passe par le point de contact et qui soit perpendiculaire à la directrice (d^2); ces perpendiculaires seront autant de tangentes à la surface proposée et leurs projections seront les droites ak, bk', ck'' perpendiculaires à d^2, car deux droites perpendiculaires, dont l'une est horizontale, ont leurs projections horizontales perpendiculaires.

Pour que ces tangentes soient déterminées, il faut encore coter leurs projections; pour cela, il n'y a qu'à mener dans chaque plan tangent par un point, dont la cote est connue, une horizontale, qui rencontrera la tangente située dans ce même plan en un point, qui aura même cote.

D'après cela, si par les points a', b', c', projections de tous points ayant pour cote 1, et appartenant respectivement aux trois plans tangents, on mène les droites $a'k$, $b'k'$, $c'k''$, parallèlement à d^2, horizontale commune aux trois plans tangens, les points k, k', k'', dans lesquels ces droites rencontreront les projections des tangentes auront tous pour cote 1.

Maintenant il est facile de démontrer que toutes ces tangentes sont coupées par un plan horizontal en ligne droite.

Pour cela, il suffit de faire voir qu'en prenant sur chaque tangente un point dont la cote est la même, les projections de tous ces points sont en ligne droite.

Or, les points k, k', k'', projections de tous points ayant pour cote 1, et appartenant respectivement aux trois tangentes sont, d'après l'égalité (1), en ligne droite, comme étant les intersections de deux systèmes de parallèles proportionnellement espacées (15).

Corol. Si l'on fait faire à chaque tangente un quart de révolution, autour de son point de tangence et dans un plan perpendiculaire à la génératrice du paraboloïde, toutes ces tangentes deviendront des normales à la surface; et comme leurs positions relatives n'auront pas changé, elles constitueront encore un paraboloïde hyberbolique; *donc la surface composée de toutes les normales à un paraboloïde hyperbolique le long d'une même génératrice est un paraboloïde hyperbolique.* Cette propriété appartient à toutes les surfaces gauches.

§ XI.

32. *Les projections horizontales de toutes les horizontales qui s'appuient sur deux droites de l'espace parallèles à un même plan vertical passent par un même point.* —

Démonstration. De ce que les deux droites sont parallèles à un même plan vertical, leurs projections horizontales sont parallèles.

Soit (fig. 6) $a\,b\,c\,d$.. etc. la projection de la première droite; et supposons que les points projetés en a, b, c, d, etc. aient respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc; ensuite,

Soit $a'\,b'\,c'\,d'$.. etc. parallèle à $a\,b\,c\,d$.. etc. la projection de la seconde droite; et supposons que les points projetés en a', b', c', d', etc. aient respectivement mêmes cotes α, β, γ, δ, etc. que les points de la première; alors,

aa', bb', cc', dd', etc. seront les projections d'autant d'horizontales qui rencontrent chacune les deux droites proposées.

Pour que ces projections passent par un même point, il suffit évidemment de prouver que l'on a :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.}$$

Or, ces égalités de rapports subsistent parce que les deux droites sont pareillement cotées (11).

Cette démonstration prouve en même temps la première propriété énoncée au numéro (24).

33. *Trouver le point de rencontre d'une droite avec un hyperboloïde de révolution à une nappe, représenté par sa génératrice rectiligne.*

La solution que nous allons donner de ce problème a l'avantage d'être débarrassée de toute considération de géométrie analytique.

On prendra le plan vertical de projection parallèle à la droite proposée et l'on fera tourner la génératrice de l'hyperboloïde autour de l'axe de révolution, que nous supposons vertical, jusqu'à ce qu'elle prenne une position parallèle au plan vertical.

Cela fait, le problème sera résolu, si l'on peut trouver deux points, l'un sur la génératrice, l'autre sur la droite, tous deux à égale distance du plan horizontal, et à égale distance de l'axe de révolution; car de ces deux points celui, qui est sur la génératrice, engendrera dans le mouvement de celle-ci une circonférence, qui passera évidemment par le point situé sur la droite; et par suite, le point ainsi déterminé sur la droite sera précisément le point cherché.

En supposant connus les deux points que nous cherchons, la droite terminée à ces points sera une horizontale, dont les extrémités sont à égale distance de l'axe; et par suite la plus courte distance entre l'axe et cette horizontale divisera en deux parties égales cette dernière.

Donc, parmi toutes les horizontales terminées à la génératrice et à la droite, celle, qui est divisée en deux parties égales par sa plus courte distance à l'axe, coupera la génératrice et la droite aux points cherchés. Cette horizontale, nous l'appellerons *horizontale convenable.*

Nous ferons remarquer en premier lieu que, comme la droite et la génératrice sont parallèles au plan vertical de projection, il résulte du numéro précédent (32), que les projections horizontales de toutes les horizontales terminées à la droite et à la génératrice doivent passer, étant prolongées, par un même point; et l'on connaîtra ce point en construisant les projections de deux horizontales quelconques.

Nous ferons remarquer en second lieu que les projections horizontales des plus courtes distances entre toutes les horizontales et l'axe passent toutes par la projection horizontale *de l'axe* et par suite *par un même point*.

De ces remarques, et de ce que chaque horizontale et sa plus courte distance à l'axe se projettent sur le plan horizontal dans des perpendiculaires, il suit que les points de rencontre de chaque horizontale, avec sa plus courte distance à l'axe, se trouvent en projection horizontale sur une même circonférence de cercle. (Car si, dans un même plan, on mène, par un même point, des perpendiculaires à toutes les droites partant d'un même autre point, les pieds de ces perpendiculaires seront sur une même circonférence de cercle, ayant pour diamètre la droite qui unit ces deux points).

En prenant maintenant sur cette circonférence un point à égale distance des projections horizontales de la droite et de la génératrice, on aura la projection horizontale d'un point de l'horizontale convenable. Joignant ce point avec le point unique par lequel passent les projections horizontales de toutes les horizontales, on aura la projection horizontale de l'horizontale convenable.

Observation. Le problême aura généralement deux solutions. Il n'en aura qu'une, s'il n'y a qu'un point de la circonférenee en question à égales distances des projections de la droite et de la génératrice; et il sera impossible, s'il n'y a pas de point sur la circonférence à égale distance des mêmes projections.

ÉPURE. (fig. 1.)

DD', *dd'* projections de la droite parallèle au plan vertical.

V, *v* projections de l'axe de révolution de l'hyperboloïde.

GG', *gg'* projection de la génératrice dans sa position parallèle au plan vertical.

GD, *gd*, projections d'une première horizontale s'appuyant sur la droite et la génératrice.

G'D', *g'd'*, projections d'une seconde horizontale s'appuyant sur la droite et la génératrice.

O. Point unique, par lequel passent les projections horizontales de toutes les horizontales s'appuyant sur la droite et la génératrice. —

OMV. Circonférence décrite sur OV comme diamètre.

MM' Droite à égale distance de DD' et de GG'

OM, OM' Projections horizontales de deux horizontales convenables. *qr*, *q'r'*, leurs projeotions verticales.

QR, qr, Projections de la portion de la première horizontale comprise entre la génératrice et la droite proposée.

VM, Projection horizontale de la distance de l'axe à l'horizontale (QR, qr).

A cause que M est à égale distance de DD' et de GG', il suit que $MQ = MR$ et par suite que VM divise QR en deux parties égales, donc (QR, qr) est une horizontale convenable. On démontre de la même manière que (Q'R', $q'r'$) est une seconde horizontale convenable.

34. Note. L'hyperboloïde de révolution à une nappe est une surface gauche, c'est-à-dire, que deux génératrices consécutives quelconques ne sont pas dans un même plan. —

Soit (fig. 4) C la projection d'un parallèle quelconque ayant pour cote α et C' la projection du cercle de gorge, ou du plus petit parallèle, ayant pour cote β.

On sait que la projection d'une génératrice quelconque doit être tangente à la projection du cercle de gorge.

D'après cela g, g', tangentes à C', seront les projections de deux génératrices qui rencontrent le parallèle C en deux points ayant chacun pour cote α, et le parallèle C' en deux points ayant chacun pour cote β. — Pour que ces génératrices pussent être dans un même plan, il faudrait que (6) les deux horizontales (α α), (β β) fussent dans un même plan et par suite parallèles. Or, il est facile de prouver que la droite ($\beta\beta$) est parallèle à d, et par suite ne saurait être parallèle à la droite (α α).

§ XII.

35. *Définition. — Par système de polaires, nous entendons un ensemble de droites, tracées dans un même plan, et passant par un même point appelé pôle.*

36. *Définition. — Un système de polaires et un système de parallèles, tous deux situés dans un même plan, sont dits proportionnellement espacés, lorsque, les polaires interceptant sur une transversale des parties quelconques, les parallèles interceptent sur la même transversale ou sur une transversale différente des parties respectivement proportionnelles ; cela posé,*

Propriété. — Dans un système de polaires et un système de parallèles proportionnellement espacés, les parallèles rencontrent respectivement leurs polaires correspondantes, sur une même parabole ou sur une même hyperbole : ce sera une parabole ou une hyperbole suivant que la transversale des polaires est parallèle, ou non, à la direction des parallèles.

Démonstration. — Soient (fig. 9) p, p' p'', etc. les parallèles, dont la transversale est $a\,b\,c\,d$.. etc. et soient π, π', π'', etc., les polaires dont la transversale est a' b' c' d'.. etc. on donne :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.}\ldots (1)$$

Il faut prouver que les points m, m', m'', etc., dans lesquels les parallèles rencontrent respectivement leurs polaires correspondantes, sont sur une parabole ou sur une hyperbole.

Les transversales $a\,b\,c\,d$.. etc., $a'\,b'\,c'\,d'$.. etc. à cause de la proportion (1) peuvent être prises pour les projections de deux droites de l'espace pareillement cotées, de sorte que α β γ δ, etc.

étant les cotes respectives des points projetés en a, b, c, d, etc.; α, β, γ, δ, etc. seront encore les cotes respectives des points projetés en a', b', c', d', etc.

Les polaires π, π', π'', etc. étant prises pour les projections de toutes horizontales s'appuyant sur la droite de l'espace ($abcd$.. etc.) et sur la verticale (D), seront les projections d'autant de génératrices d'un paraboloïde hyperbolique droit ayant le plan horizontal pour plan directeur et ces génératrices auront respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc.

Les parallèles, p, p', p'', etc., étant prises pour les projections d'autant d'horizontales d'un même plan passant par la droite de l'espace ($a'b'c'd'$.. etc.), auront également pour cotes respectives α, β, γ, δ, etc.

Ainsi une parallèle quelconque et sa polaire correspondante sont les projections de deux horizontales de même cote; et par suite le point d'intersection de cette parallèle avec sa polaire correspondante est la projection d'un point appartenant à la fois au plan et au paraboloïde. Donc la courbe, formée par les points dans lesquels les parallèles rencontrent respectivement leurs polaires correspondantes, est la projection de la courbe d'intersection du paraboloïde avec le plan; et cette projection sera une parabole ou une hyperbole : car on sait par la géométrie analytique qu'un paraboloïde est coupé par un plan suivant une parabole ou suivant une hyperbole et que les projections orthogonales de ces courbes sont des courbes de même espèce. On sait de plus que la courbe est une parabole ou une hyperbole suivant que le plan sécant est parallèle ou non à l'intersection des deux plans directeurs du paraboloïde.

Or, l'intersection des deux plans directeurs est parallèle à la transversale $a'b'c'd'$, etc., et le plan sera parallèle, ou non, à cette intersection selon que les parallèles p, p', p'', etc. seront parallèles, ou non, à la même transversale $a'b'c'd'$.. etc.

Observation. La courbe d'intersection du système de parallèles et de leurs polaires correspondantes se réduira à une droite parallèle à la transversale des polaires, si la polaire, qui est parallèle à la direction des parallèles coupe la transversale des polaires et la transversale des parallèles en deux points correspondants. Voyez (fig. 10) où la polaire p d' d, parallèle à la direction des parallèles $a\,a''$, $b\,b''$, etc., coupe les deux transversales $a\ b\ c\ d$.. etc., $a'b'c'd'$.. etc. aux points correspondants d, d' et où la courbe d'intersection se réduit à la droite $a''b''c''d''$.. etc. parallèle à transversale $a'b'c'd'$.. etc.

§ XIII.

38. *Si, dans un cercle, on laisse les abscisses les mêmes et qu'on augmente ou diminue toutes les ordonnées, en les multipliant ou en les divisant toutes par une même constante, les extrémités de toutes les ordonnées ainsi augmentées ou diminuées constitueront une ellipse.*

Démonstration. On prendra le cercle pour base d'un cylindre droit. Par l'un des diamètres du cercle on mènera un plan quelconque qui coupera le cylindre, comme on sait, suivant une ellipse.

Le diamètre du cercle étant pris pour l'axe des abscisses des deux courbes, il est évident que pour une même abscisse, chaque ordonnée du cercle est la projection de l'ordonnée correspondante de l'ellipse; et comme les ordonnées de l'ellipse font avec le plan du cercle un même angle que je désigne par α, il résulte qu'en multipliant toutes les ordonnées de l'ellipse par $\cos \alpha$, on aura les ordonnées du cercle et par suite en divisant toutes les ordonnées du cercle par $\cos \alpha$, on aura les ordonnées de l'ellipse. Donc, etc.

39. — *Dans un conoïde droit ayant pour directrice une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire au plan directeur, toutes les sections par des plans parallèles à la directrice sont des ellipses.*

Soit (fig. 6) saf la projection horizontale d'un cône dont le sommet s est dans le plan horizontal et dont la directrice est une circonférence de cercle projetée dans son diamètre af, aussi situé dans le plan horizontal.

Soient a, b, c, d, etc. les projections d'un certain nombre de points de la directrice et α, β, γ, δ, etc. les cotes ou ordonnées respectives de ces points.

sa, sb, sc, sd, etc. seront les projections d'autant de génératrices du cône.

Soit $a'f'$ la projection d'un plan vertical parallèle à celui af de la directrice. Ce plan coupera le cône suivant une courbe semblable à la directrice, c'est-à-dire, suivant une circonférence de cercle ; les points projetés en a', b', c', etc. appartiennent donc à une circonférence de cercle, et si nous désignons par α, β', γ', δ', etc. les cotes ou ordonnées respectives de ces points, nous aurons pour relation entre les cotes des deux points, dans lesquels une même génératrice quelconque (sb) rencontre les deux circonférences (af), ($a'f'$) en observant que la cote du point s est zéro.

$$bs : \beta = b's : \beta' \text{ delà } \beta = \frac{bs}{b's} : \beta'.$$

Et comme le rapport de bs à $b's$ est le même pour une génératrice quelconque, car la figure donne :

$$bs : b's = cs : c's = ds : d's = \text{etc.} = m.$$

Il en résulte que :

$$\beta = m\,\beta',\ \gamma = m\,\gamma',\ \delta = m\,\delta',\ \text{etc.}$$

Ainsi pour passer des ordonnées α', β', γ', δ', etc. du cercle ($a'f'$) aux ordonnées α, β, γ, δ, etc. du cercle (af), il suffit de multiplier les premières par la constante m. Cela posé,

Imaginons le conoïde à plan directeur horizontal, ayant même directrice (af) que le cône et pour directrice rectiligne la verticale projetée dans le sommet s du cône.

Les projections des génératrices du cône deviendront les projections d'autant de génératrices du conoïde que nous venons de définir, en les prenant pour projections d'autant d'horizontales ayant respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc. ; par suite a', b', c', d', etc. seront les projections d'autant de points d'une section faite dans le conoïde, en leur donnant respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc.

Ainsi en considérant $a'b'c'd'$, comme la projection d'une section circulaire faite dans le cône, les points projetés en a', b', c', d', etc. auront respectivement pour cotes

α', β', γ', δ', etc. ; et en considérant $a'b'c'd'$ comme la projection d'une section faite dans le conoïde, les points projetés en a', b', c', d', etc. auront respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc. ou bien $m\,\alpha'$, $m\,\beta'$, $m\,\gamma'$, $m\,\delta'$, etc.

Ainsi pour avoir la section faite dans le conoïde, il suffit de prolonger les ordonnées α', β', γ', δ', etc. de la section circulaire ($a'f'$) du cône, de manière qu'elles deviennent respectivement $m\,\alpha'$, $m\,\beta'$, $m\,\gamma'$, $m\,\delta'$, etc. Donc la section faite dans le conoïde est d'après (38) une ellipse.

§ XIV.

40. Définition. *Nous dirons que deux systèmes de polaires, situées dans un même plan, sont ou rectilignes, ou circulaires ou elliptiques, selon que les polaires du premier système rencontrent respectivement les polaires du second sur une même droite, sur une même circonférence de cercle passant par les deux pôles ou sur une même ellipse passant par les deux pôles.*

Nous nommerons polaires correspondantes celles qui deux à deux se coupent sur cette droite, sur cette circonférence, sur cette ellipse.

Par angle de deux polaires correspondantes nous entendons l'angle opposé à la droite qui unit les deux pôles.

41. Propriété. *Deux systèmes de polaires rectilignes, circulaires ou elliptiques sont proportionnellement espacées, si on les coupe respectivement par deux transversales respectivement parallèles à deux polaires correspondantes; en faisant attention que chaque transversale doit appartenir au même système que la polaire à laquelle elle est parallèle.*

Démonstration. Nous nous contenterons de démontrer la propriété énoncée pour deux systèmes de polaires circulaires, et d'indiquer la démonstration pour deux systèmes de polaires elliptiques.

Soient (fig. 14) les polaires pa, pb, pc, pd, etc., ayant pour pôle p et coupant respectivement les polaires $p'a'$, $p'b'$, $p'c'$, etc. ayant pour pôle p' sur une même circonférence.

Soient $a\ b\ c\ d$.. etc., $a'b'c'd'$.. etc. deux transversales respectivement parallèles aux deux polaires correspondantes quelconques pM, $p'M$.

Il faut prouver qne l'on a la proportion :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc}\ldots (1)$$

Les triangles qui ont leur sommet en p, et dont les bases respectives sont ab, bc, cd, etc., sont respectivement semblables aux triangles qui ont leur sommet en p', et dont les bases respectives sont $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, etc. En effet, par construction l'angle 0 est égal à l'angle M et par suite l'angle 0 est supplémentaire de chacun des angles ω, ω', ω'', ω''', etc. Cela posé : dans le quadrilatère $a\,o\,a'\omega$, les deux angles opposés $x + z = 2$ droits; mais on a aussi $z + y = 2$ droits; donc $x = y$. De même dans le quadrilatère $b\,o\,b'\omega'$, les deux angles opposés $x'' + y' = 2$ droits; mais on a aussi $x' + x'' = 2$ droits; donc $x' = y'$. Ainsi les deux triangles pab, $p'a'b'$ sont semblables comme ayant deux angles respectivement égaux.

3

Ayant démontré de la même manière que tous les autres triangles sont respectivement semblables, il sera facile de déduire de cette similitude la proportion (1) qu'il s'agissait de prouver.

On prouve que la propriété existe également pour deux systèmes de polaires elliptiques en observant que ces derniers peuvent toujours être regardés comme la projection de deux systèmes de polaires circulaires.

Delà on déduit un moyen facile pour construire une ellipse dont on connaît cinq points et pour mener la tangente en un quelconque de ces points.

§ XV.

42. *Dans deux systèmes de polaires coupés chacun par une transversale, nous entendons par angle des deux transversales, l'angle opposé à la droite qui unit les deux pôles; en imaginant les deux transversales prolongées jusqu'à la rencontre de cette droite. Cela posé :*

43. *Deux systèmes de polaires proportionnellement espacées sont circulaires ou se coupent deux à deux sur une même circonférence de cercle passant par les deux pôles, si deux polaires seulement du premier système rencontrent chacune sa correspondante du second système sous un angle qui devra être égal à celui des deux transversales ou supplément du même, selon, qu'en menant par le pôle de chaque système une parallèle à sa transversale, le point d'intersection de ces deux parallèles est, ou non, du même côté que le sommet de cet angle, par rapport à la droite qui unit les deux pôles.*

Démonstration. Soient (Fig. 14) pa, pb, pc, pd, etc., $p'a', p'b', p'c', p'd'$, etc. les deux systèmes de polaires etc. $a\ b\ c\ d$.. etc., $a'b'c'd'$.. etc. leurs transversales respectives. On donne :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc. (1)}$$

Et l'on suppose de plus que les angles ω, ω' sont égaux et suppléments chacun de l'angle 0 formé par les deux transversales. Pour prouver la propriété énoncée, il suffit évidemment de faire voir que tous les autres angles ω'', ω''', etc., sous lesquels se coupent deux à deux les autres polaires correspondantes, sont égaux, comme étant suppléments chacun de l'angle 0.

Pour cela démontrons d'abord que les triangles qui ont leur sommet en p et pour bases respectives pa, pb, pc, etc. sont respectivement semblables aux triangles qui ont leur sommet en p' et pour bases respectives $p'a'$, $p'b'$, $p'c'$, etc.

A cause que l'on a $0 + \omega = 2$ droits et $0 + \omega' = 2$ droits, on fera voir comme à l'article précédent (41) que les deux triangles pab, $p'a'b'$ sont semblables comme étant équiangles. Au moyen de la similitude de ces deux triangles et de la proportion (1) on démontrera que les deux triangles suivants pbc, $p'b'c'$ sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, et l'on suivra la même marche pour prouver la similitude de tous les autres triangles.

De la similitude de ces triangles résulte que tous les angles marqués sur la figure de la même manière en x et en y sont égaux. Cela posé :

Dans le quadrilatère $c\,o\,c'\omega''$, la somme des deux angles opposés $x_0 + y''' = 2$ droits; car $y_0 = x_0$ et $y''' + y_0 = 2$ droits; donc aussi $0 + \omega'' = 2$ droits et par suite ω'' est supplément de 0.

De la même manière on prouvera que dans le quadrilatère $d\,o\,d'\,\omega'''$ la somme des angles $0 + \omega''' = 2$ droits et par suite que ω''' est supplément de 0. Donc etc.

§ XVI.

44. Problème. *Deux droites divisées dans le plan horizontal en parties respectivement proportionnelles étant prises pour transversales de deux systèmes de polaires proportionnellement espacées, et le pôle de l'un des systèmes étant donné, déterminer le pôle de l'autre système de manière que les deux systèmes soient circulaires, c'est-à-dire, que les polaires du premier systèmes coupent respectivement leurs correspondantes du second système sur une même circonférence de cercle passant par les deux pôles.*

Soit p (fig 15) le pôle des polaires dont la transversale est $a\,b\,c\,d$.. etc. et soit $a'b'c'd'$.. etc. la transversale des polaires dont le pôle p' est à déterminer de manière à satisfaire à l'énoncé.

On donne la proportion $ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' =$ etc.

Cela posé, par le point a', correspondant à a, je mène les deux droites indéfinies $a'p'$, $a'x$, dont chacune fasse avec la polaire pa des angles respectivement égaux à ceux des deux transversales. De même par le point b', correspondant à b, je mène les deux droites indéfinies $b'p'$, $b'x$, dont chacune fasse avec la polaire $p\,b$ des angles respectivement égaux à ceux des deux transversales.

Ces quatre droites se couperont en quatre points dont un seul, le point p' pris pour le pôle cherché, satisfera d'après l'énoncé du numéro (42) à la question proposée.

§ XVII.

45. Principe. *Un système de polaires peut toujours être considéré comme la projection d'un paraboloïde hyperbolique droit à plan directeur horizontal. Dans ce cas, le pôle est la projection de la directrice perpendiculaire au plan directeur; la transversale est la projection de la directrice oblique et les polaires sont les projections des génératrices horizontales du paraboloïde. Cela posé :*

46. *Deux systèmes de polaires circulaires et proportionnellement espacées étant pris pour projections de deux paraboloïdes hyperboliques droits à plan directeur horizontal, ces deux paraboloïdes se couperont suivant une courbe dont la projection sur le plan directeur commun (ici le plan horizontal) sera une circonférence de cercle, si l'on a soin de coter pareillement les deux transversales, projections des directrices obliques.*

Démonstration. Les deux transversales divisées en parties respectivement proportionnelles étant prises pour les projections de deux droites de l'espace pareillement cotées, deux polaires correspondantes seront les projections de deux génératrices de même cote, appartenant respectivement aux deux paraboloïdes; et par suite le point de rencontre de deux polaires correspondantes sera la projection d'un point appartenant à la fois aux deux paraboloïdes.

Or, deux polaires correspondantes quelconques se coupent sur une même circonférence passant par les deux pôles ; donc la projection de la courbe d'intersection des deux paraboloïdes sera une circonférence de cercle.

§ XVIII.

47. *Chercher le point de rencontre d'une droite avec le paraboloïde hyperbolique au moyen de la droite et du cercle.*

Nous prendrons le plan directeur pour plan horizontal de projection et nous supposerons l'une des deux directrices perpendiculaire à ce plan directeur; parce que notre démonstration exige que l'une des deux directrices se projette en un point sur le plan directeur pris pour plan de projection. (Condition que l'on pourra d'ailleurs toujours remplir en se servant d'un système de projection oblique dans lequel plans et droites projetants seront parallèles à l'une des deux directrices). Le paraboloïde proposé est donc supposé droit. Cela posé :

Solution dans l'espace. Par la droite proposée je fais passer un paraboloïde droit ayant le plan horizontal pour plan directeur et choisi de manière que son intersection avec le paraboloïde proposé se projette dans une circonférence de cercle. L'intersection de la projection de la droite avec cette circonférence sera la projection du point de rencontre ; et il ne reste plus qu'à chercher la cote de ce point considéré comme appartenant à la droite.

Solution graphique. Soit le point p la projection de la directrice perpendiculaire au plan directeur, et $a\ b\ c\ d$.. etc. la projection de la directrice oblique, les points projetés en a, b, c, d, etc. ayant respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc.

Supposons la droite proposée dont la projection est $a'b'c'd'$.. etc. pareillement cotée que la directrice oblique ; et soient a', b', c', d', etc. les projections des points qui ont respectivement mêmes cotes α, β, γ, δ, etc. que les points de la directrice projetés respectivement en a, b, c, d, etc.

La droite proposée et la directrice oblique étant pareillement cotées, on a :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc}\ldots \quad (1)$$

En considérant le point p comme le pôle d'un système de polaires ayant pour transversale $a\ b\ c\ d$.. etc., les polaires pa, pb, pc, etc. seront les projections d'autant de génératrices du paraboloïde proposé.

A cause de la proportion (1) je puis déterminer le pôle p' d'un second système de polaires ayant pour transversale $a'b'c'd'$.. etc. et qui soit circulaire avec le système précédent. (44)

Ce second système de polaire sera la projection d'un paraboloïde auxiliaire passant par la droite proposée; et la circonférence, sur laquelle se couperont deux polaires correspondantes quelconques, sera la projection horizontale de l'intersection du paraboloïde proposé avec le paraboloïde auxiliaire.

§ XIX.

48. Définitions. *Un système de parallèles et un système de circonférences de cercles concentriques seront dites proportionnellement espacées, lorsque, les circonférences interceptant sur une transversale passant par le centre des parties quelconques, les parallèles interceptent sur la même transversale ou sur une transversale différente des parties respectivement proportionnelles. Le centre est considéré ici comme un cercle dont le rayon est nul.*

49. *Une circonférence et une parallèle seront dites correspondantes ou se correspondre l'une à l'autre, lorsque la parallèle rencontre sa transversale en un point correspondant* (10) *à celui dans lequel la circonférence rencontre sa transversale.*

50. Propriété. *Si un système de circonférences de cercles concentriques est rencontré par un système de parallèles proportionnellement espacées à ces circonférences, les points de rencontre des circonférences avec les parallèles qui leur correspondent respectivement se trouveront sur une parabole, sur une hyperbole, ou sur une ellipse.*

Démonstration Soient (fig. 11, 12, 13) p, p', p'', etc. le système de parallèles, et $a\ b\ c\ d$.. etc. leur transversale.

Soient c, c', c'', etc. le système de circonférences de cercles, et $a'b'c'd'$.. etc. leur transversale.

Puisque d'après l'énoncé les deux transversales sont divisées de manière que l'on a :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.}$$

On peut les prendre pour les projections de deux droites de l'espace pareillement cotées; de sorte que si α, β, γ, δ, etc. sont les cotes des points de la première projetés respectivement en a, b, c, d, etc; α, β, γ, δ, etc. seront aussi les cotes des points de la seconde projetés respectivement en a', b', c', d', etc.

En considérant les parallèles p, p', p'', etc. comme les projections d'autant d'horizontales d'un même plan passant par la droite de l'espace projetée dans la transversale $a\ b\ c\ d$.. etc., ces horizontales auront respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc.

De même, en considérant les circonférences de cercles c, c', c'', etc. comme les projections d'autant de circonférences de cercles horizontaux qui ont leurs centres sur la verticale projetée en a' et qui s'appuient toutes sur la droite projetée dans la transversale $a'b'c'd'$.. etc., ces circonférences de l'espace appartiendront à un cône droit à base circulaire et auront respectivement pour cotes α, β, γ, δ, etc.

Ainsi une parallèle quelconque et la circonférence qui lui correspond sont l'une la projection d'une horizontale de ce plan, l'autre la projection d'une circonférence de ce cône; et cette horizontale a même cote que la circonférence.

Le point d'intersection d'une parallèle quelconque avec la circonférence qui lui correspond est donc la projection d'un point appartenant à la fois au cône et au plan ; par conséquent la courbe, formée par les intersections des parallèles avec les circonférences qui leur correspondent respectivement, est la projection d'une section plane faite dans un cône droit à base circulaire; or, on sait que cette section est une parabole, une hyperbole, ou une ellipse et que les projections orthogonales de ces courbes sont encore des courbes de même espèce, car l'ellipse ne saurait dans le cas présent se projeter dans un cercle. Donc etc.

Pour reconnaître l'espèce de courbe sur laquelle les circonférences rencontrent respectivement leurs parallèles correspondantes, nous supposons que la transversale *abcd*.. etc. des parallèles soit perpendiculaire à ces dernières et dans le cas contraire qu'on la remplace, ce qui est permis, par une autre jouissant de cette propriété; cela fait, en comparant une division quelconque *ab* de la traversale des parallèles avec la division correspondante *a'b'* de la transversale des circonférences, la courbe sera :

Une parabole si $ab = a'b'$.... (fig. 11)
Une hyperbole si $ab < a'b'$....(fig. 12)
Une ellipse si $ab > a'b'$ ....(fig. 13)

On se rendra compte de cela, si l'on transporte parallèlement à lui-même, jusqu'au sommet du cône, le plan projeté dans les parallèles; car on trouvera que dans cette position le plan est tangent au cône, si $ab = a'b'$, qu'il coupe le cône suivant deux génératrices, si $ab < a'b'$; enfin qu'il n'a que le sommet de commun avec le cône, si $ab > a'b'$.

52. Nous ferons observer que la parabole se réduit à une droite passant par le centre, l'hyperbole à deux droites qui passent également par le centre et l'ellipse à un point unique qui est le centre; si le centre et le point qui lui correspond sur la transversale des parallèles se trouvent sur une droite parallèle aux parallèles, c'est que dans ce cas le plan projeté dans les parallèles passe par le sommet du cône.

53. Nous allons maintenant indiquer la manière de déterminer les sommets des courbes, pour cela il faut prendre, ce qui est permis, pour transversale des cercles une droite, passant toujours par le centre et perpendiculaire à la direction des parallèles; cette transversale sera évidemment un axe de la courbe. Cela fait, tout se réduit à construire une parallèle qui coupe les deux transversales en deux points correspondants; celui de ces deux points qui est situé sur la transversale des cercles sera un sommet.

Ainsi la parallèle menée par le point *m*, intersection des deux droites *aa'* et *dd'*, qui s'obtiennent en joignant deux points quelconques *a*, *d* de la première transversale avec leurs correspondants *a'*, *d'* de la seconde transversale, coupera la transversale des cercles en un sommet de la courbe. Il est en effet facile de démontrer que la parallèle ainsi construite ne fait que toucher son cercle correspondant en un point situé sur l'axe; par suite ce point est un sommet.

54. *Tangente.* — Pour construire la tangente en un point donné sur l'une quelconque des trois courbes, il faut prolonger la droite qui unit ce point avec le centre, jusqu'à la rencontre d'une circonférence quelconque; en ce point de rencontre mener à cette circonférence une tangente; la droite, qui joint le point proposé avec le point où cette tangente rencontre la parallèle qui correspond à cette circonférence, sera la tangente demandée.

Nous avons oublié à l'article (37) de parler de la construction de la tangente, nous allons réparer ici cette omission. Pour mener la tangente en un point donné sur la courbe (parabole ou hyperbole) par le point proposé, il faut mener une première droite auxiliaire parallèle à la transversale des polaires jusqu'à la rencontre d'une polaire quelconque que je désigne par *x*; en ce point de rencontre il faut mener une seconde droite auxiliaire parallèle à la polaire qui passe par le point proposé; joignant le point proposé avec le point où cette seconde droite auxiliaire rencontre la parallèle qui correspond à la polaire *x*, on aura la tangente demandée.

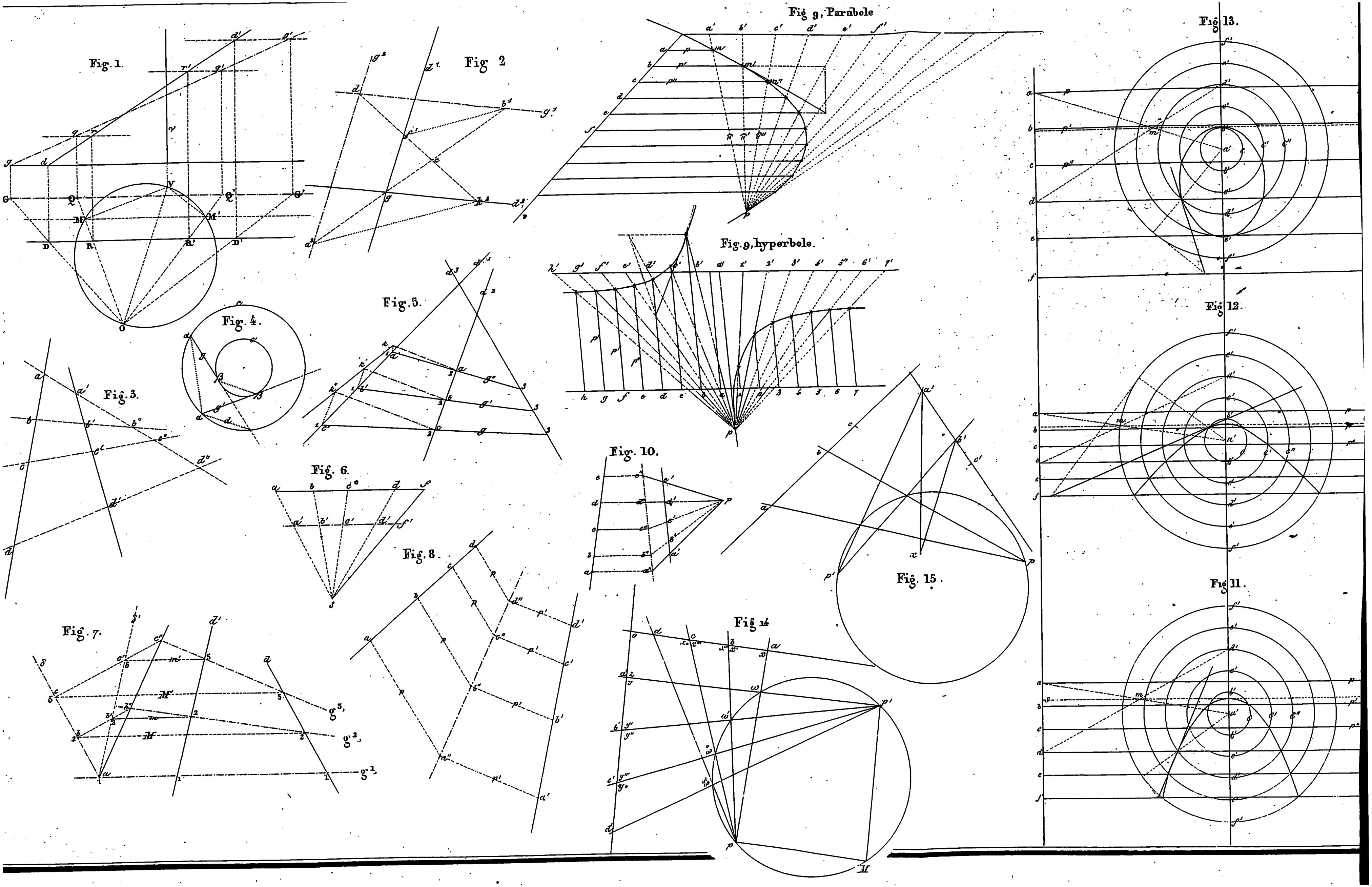


Fig. 1.
Fig 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig 9, Parabole
Fig. 9, hyperbole.
Fig. 10.
Fig 11.
Fig 12.
Fig 13.
Fig 14
Fig. 15.