4° Les aires des quatre courbes sont

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho_1^2 d\varphi,\qquad 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho_1^2 d\varphi,\qquad 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho_2^2 d\varphi,\qquad 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho_3^2 d\varphi;$$

si l'on substitue les valeurs (2), (3), (4), (5), on obtient pour la somme des aires

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi,$$

ce qui est précisément l'aire de la podaire du centre de l'ellipse.

×Question 846.

(Voir *Mathesis* (2), III, 215; IV, 27).

Tout carré impair, supérieur à 1, *est la somme de deux carrés, ou la somme de trois carrés.*

Solution par M. E. Catalan. Lemme I. *Tout nombre premier* p, *de la forme* $4\lambda + 1$, *est la somme de deux carrés.* (Fermat.)

Lemme II. *Si un nombre premier* q, *a la forme* $4\mu - 1$, q^2 *est la somme de trois carrés* (*).

Soient, d'après ce qui précède :

$$p = a^2 + b^2,\quad q^2 = f^2 + g^2 + h^2.$$

Supposons :

1° $N = pq$, 2° $N = pp'p''$, 3° $N = qq'q''$, 4° $N = pp'p''qq'q''$, etc.

1° $$N^2 = p^2q^2 = (pf)^2 + (pg)^2 + (hf)^2.$$

2° $$N^2 = p^2p'^2p''^2.$$

Mais, d'après le théorème de Fibonacci (**) :

$$p^2p'^2p''^2 = c^2 + d^2;\quad \text{donc}\quad N^2 = c^2 + d^2.$$

3° $$N^2 = q^2q'^2q''^2,$$

ou $$N^2 = (f^2 + g^2 + h^2)\,q'^2q''^2 = (fqq')^2 + (gq'q'')^2 + (hq'q'')^2.$$

4° $$N^2 = p^2p'^2p''^2q^2q'^2q''^2$$
$$= (fpp'p''q'q'')^2 + (gpp'p''q'q'')^2 + (hpp'p''q'q'')^2 \text{ etc.}$$

(*) Pour ces deux Lemmes, on peut consulter nos *Remarques sur la théorie des nombres et sur les fractions continues* (1893).

(**) $$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = c^2 + d^2,$$
$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)(a''^2 + b''^2) = (c^2 + d^2)(a''^2 + b''^2) = c'^2 + d'^2, \text{ etc.}$$

En résumé, N^2 étant impair, et supérieur à 1, ce carré est réductible à l'une ou à l'autre des formes

$$a^2 + b^2, \quad f^2 + g^2 + h^2.$$

Remarque. Reprenons les égalités

$$N^2 = a^2 + b^2, \quad N^2 = f^2 + g^2 + h^2.$$

Multipliant par 4^n, nous aurons

$$(2^n N)^2 = (2^n a)^2 + (2^n b)^2,$$
$$(2^n N)^2 = (2^n f)^2 + (2^n g)^2 + (2^n h)^2$$

Donc *tout carré pair, supérieur à* 4, *est la somme de deux carrés, ou la somme de trois carrés.*

P. S. *Si un nombre* N *est la somme de trois carrés ou de quatre carrés,* N^2 *est la somme de trois carrés* (*).

24 juin 1893.

Question 859.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 176).

Un cercle (C) *coupe une conique* (Σ) *en quatre points. Par ces quatre points on fait passer une hyperbole équilatère* (H). *Quel que soit le cercle* (C) *le rapport des distances respectives du centre de* (Σ) *aux centres de* (C) *et de* (H), *est constant.* (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Droz-Farny, Collette, Gillet, Déprez et Mandart. Les équations de C et Σ étant

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

toute conique passant par les points l'intersection de C et Σ aura pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma - \lambda (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0.$$

Cette conique sera une hyperbole équilatère si

$$1 - \lambda b^2 = \lambda a^2 - 1 \,; \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{2}{a^2 + b^2}.$$

Les coordonnées des centres de C et de H sont respectivement

$$\alpha, \ \beta \ \text{ et } \ \frac{\alpha}{1 - \lambda b^2} = \frac{\alpha (a^2 + b^2)}{c^2}, \quad \frac{\beta}{1 - \lambda a^2} = - \frac{\beta (a^2 + b^2)}{c^2}.$$

(*) *Remarques sur la théorie des nombres*, p. 28.