une ligne asymptotique de Ov, Oy. Si l'on dessine la figure symétrique des deux précédentes par rapport à Oy, puis les symétriques des deux précédentes par rapport à O, on aura dessiné complètement la courbe (3).

Cette question 821, est ancienne. Voir N. A. M., 1850, IX, p. 41, aux questions d'examens de l'École Polytechnique en 1849, n° 106.

×Question 855.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 175.)

Si un nombre premier p n'est pas la somme de deux carrés, p^2 est la somme de trois carrés (*). (E. Catalan.)

1° Supposons $p = a^2 + b^2 + c^2$. On a, identiquement,

$$p^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2.$$

On ne peut avoir, ni $c = 0$, ni $c^2 = a^2 + b^2$; car, dans le premier cas, p serait la somme de deux carrés; et, dans le second, ce nombre *impair* serait égal à $2(a^2 + b^2)$.

2° Soit, maintenant, $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; puis

$$p^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Le dernier terme est réductible à $(2f)^2 + (2g)^2$, si l'on fait

$$f = ac \pm bd, \quad g = ad \mp bc \text{ (**)}.$$

On ne peut supposer $c^2 + d^2 = a^2 + b^2$; car p serait *pair*.

Si $ac = bd$, on a

$$p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \pm 2ac \mp 2bd, \text{ ou}$$
$$p = (a \pm c)^2 + (b \mp d)^2;$$

contre l'hypothèse. De même si $ad = bc$.

Remarques. I. Le nombre p a la forme $4n - 1$; attendu que : *tout nombre premier, de la forme* $4n + 1$, *est la somme de deux carrés* (Fermat).

II. D'après le théorème de Bachet (ou de Fermat), il est inutile de supposer p égal à une somme de *cinq* carrés, de *six* carrés, etc.

---

courbe symétrique de cette partie par rapport à 0 correspond à ω variant entre 30° et 60°.

(*) Dans les *Recherches sur quelques produits indéfinis* (1873), j'ai conclu ce théorème, de la considération des *séries elliptiques*. Il restait à le démontrer, d'une manière élémentaire.

(**) Théorème de Fibonacci.

III. Un nombre premier, de la forme $4n - 1$, peut être, à la fois, la somme de *trois* carrés et la somme de *quatre* carrés.

Exemple. Soit $p = 19$. On a $19 = 9 + 9 + 1 = 16 + 1 + 1 + 1$.

Dans ce même cas, p^2, somme de *trois* carrés, peut être la somme de *quatre* carrés.

Exemple. Soit encore $p = 19$. On a $p^2 = 361 = 17^2 + 6^2 + 6^2 = 16^2 + 10^2 + 2^2 + 1^2$ (*).

(Octobre 1893). E. CATALAN.

Question 856.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 175).

Soient M, M′ *deux points infiniment voisins, pris sur une courbe* U; *soit* T *le point d'intersection des tangentes menées en ces points. Si au point* M, *les dérivées* y'', y''',..., $y^{(n)}$ *sont nulles, le rapport* MT : M′T *a pour limite* n.

Solution par M. E. CESARO. Prenons comme axes la tangente et la normale en M. Soient Q le point de rencontre de la tangente en M′ avec l'axe des y, et Q′ la projection de M′ sur l'axe des x. On a

$$\lim \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{M'T}} = \lim \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{TQ'}} \cdot \lim \frac{\mathrm{TQ'}}{\mathrm{M'T}} = \lim \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{TQ'}} = \lim \frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{M'Q'}} = \lim \frac{xy' - y}{y}.$$

Cela étant, si l'on applique la règle de l'Hospital, en supposant que $y^{(n+1)}$ soit la première dérivée non nulle en M, et que $y^{(n+2)}$ reste finie en ce point, on obtient successivement

$$\lim \frac{xy'}{y} = 1 + \lim \frac{xy''}{y'} = 2 + \lim \frac{xy'''}{y''} = 3 + \lim \frac{xy^{\mathrm{IV}}}{y'''} = \cdots$$

Donc

$$\lim \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{M'T}} = n + \lim \frac{xy^{(n+2)}}{y^{(n+1)}} = n.$$

(*) Dans la démonstration précédente, rien n'exprime que p est un nombre *premier*. Donc :

Si un nombre impair N, *non carré, n'est pas la somme de deux carrés*, N^2 *est la somme de trois carrés;* puis, évidemment : *chacun des nombres* N^4, N^8, N^{16}, ... *est la somme de trois carrés.*