Sur le développement, en fraction continue, de $\sqrt{N}$.

(Extrait d'une lettre de M. CATALAN à M. B. CARRARA)

Un petit voyage à Bruxelles, et des travaux personnels, qui me préoccupent fort, m'ont empêché, jusqu'à présent, de répondre à votre intéressante lettre du 5 de ce mois. Mais je n'ai cessé d'y penser.

Dans cette lettre, vous *plaidez* encore, me semble-t-il, pour la substitution de n à kn. Vous ne m'avez pas convaincu, probablement parce que je ne saisis pas votre idée. Mais, comme la seconde notation est fort claire, adoptons-la, si vous le voulez bien. Votre théorème, généralisation de celui de Serret, est alors exprimé par votre première formule(*) :

$$\frac{P_{2kn}}{Q_{2kn}}=\frac{1}{2}\left[\frac{P_{kn}}{Q_{kn}}+N\frac{Q_{kn}}{P_{kn}}\right]. \tag{1}$$

Si l'on y fait $k=1$, on trouve la formule de Serret (*Journal de Liouville*, tome XII, p. 519), sauf une différence de notation

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}=\frac{1}{2}\left[\frac{P_{n}}{Q_{n}}+N\frac{Q_{n}}{P_{n}}\right]. \tag{2}$$

Cela posé, *je viens de m'apercevoir* que votre formule (1) résulte, immédiatement, de la formule (2).

En effet, *dans toute fraction périodique*, on peut prendre deux périodes, trois périodes, etc., et *considérer cet ensemble comme une période unique* (*Nouvelles Annales*, 1re série, tome VIII; *Mélanges Mathématiques*, etc.). Nous pouvons donc remplacer P_n par P_{kn}, Q_n par Q_{kn}, etc. C. Q. F. D.

REMARQUE. Si l'on fait

$$\frac{P_{nk}}{Q_{nk}}=X_k, \quad \frac{P_{2nk}}{Q_{2nk}}=X_{2k},$$

le formule (2) devient, tout de suite,

$$X_{2k}=\frac{X_k+\frac{N}{X_k}}{2},$$

conformément à ce que donne le développement de

$$\left[X_k^2+\left(N-X_k^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

par la formule du binôme.

Cette remarque, due à Serret (paraît-il), n'a pas été clairement énoncée par lui; en lisant *méthode d'approximation de Newton*, on peut être tenté de croire qu'il s'agit de l'expression $h=-f(\alpha):f'(\alpha)$.

Liége, le 18 novembre 1889.

(*) C'est la formule (1) donnée plus haut (P. M.)