cercle générateur, multipliée par la circonférence décrite par le centre de ce cercle.

Pour le démontrer, on inscrit, au cercle générateur, un polygone régulier, d'un nombre de côtés indéfiniment croissant. Le volume du corps engendré par ce polygone est égal à sa surface, multipliée par la circonférence décrite par son centre (**12**). Passant à la limite, on aura, pour le volume du tore,

$$V = \pi r^2 . 2\pi l = 2\pi^2 r^2 l,$$

r désignant le rayon du cercle générateur et l la distance du centre de ce cercle à l'axe.

On peut dire encore que *le volume du tore est égal à sa surface, multipliée par la moitié du rayon du cercle générateur.*

NOTE. M. CATALAN, dans ses *Éléments de Géométrie* (2me édition, 1866, pp. 343-345), trouve l'aire et le volume du tore en démontrant d'abord un cas particulier du théorème de Guldin, celui où l'on fait tourner autour d'un axe XY, une ligne ou une figure admettant un axe de symétrie parallèle à XY. Le cas où la méridienne a un centre de symétrie peut également se traiter sans difficulté. — Dans leurs *Éléments de Géométrie* (4me édition, 1888), MM. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE ne s'occupent ni du théorème de Guldin, ni du tore; mais dans leur *Traité de Géométrie* (4e édition, 1879, t. II, pp. 228-233), ils démontrent le théorème de Guldin et l'appliquent au tore. En introduisant dans l'article de M. Gelin la considération des segments additifs et soustractifs, on pourrait en généraliser plusieurs relations, et arriver assez rapidement au théorème général de Guldin. (*Rédaction*).

REMARQUES SUR UNE NOTE DE M. ÉDOUARD LUCAS;

par M. E. CATALAN, professeur émérite à l'Université de Liége.

1. Cette intéressante Note (*) peut être abrégée et simplifiée. En effet, *l'équation*

$$ax + by = c, \tag{1}$$

admet $q+1$ *ou* q *solutions positives* (**) *suivant que l'équation auxiliaire*

$$ax' + by' = c' \tag{2}$$

(*) *Mathesis*, juin 1890, p. 129.

(**) C'est-à-dire, *solutions en nombres entiers*. On suppose $c = abq + c'$, $0 < c' < ab$.

a ou n'a pas de solution positive(*). La question est donc ramenée à celle-ci :

« *Le nombre entier c étant inférieur au produit ab, dans quel cas « l'équation* (1) *admet elle une solution en nombres entiers?* (**) »

2. Le *criterium* proposé par M. Lucas est *exact*, mais à peu près *illusoire*, à cause des calculs qu'il exige. Prenons, comme exemple, l'équation

$$47x + 31y = 875,$$

laquelle satisfait à toutes les conditions indiquées ci-dessus. En employant les notations de M. Lucas, on a d'abord :

$$a = 47, \quad b = 31, \quad r = 875.$$

Ensuite :

$$\frac{47}{31} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{15}}}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2};$$

donc

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad n = 4.$$

La formule

$$t = (-1)^{n-1} \frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2} r (\text{***})$$

donne

$$t = -\frac{47.3 + 31.2}{47^2 + 31^2} \cdot 875 = -\frac{141 + 62}{2209 + 961} \cdot 875$$

$$= -\frac{203}{3170} \cdot 875 = -\frac{203}{634} \cdot 175 = -\frac{35\,525}{634}.$$

La fraction, prise positivement, est comprise entre 56 et 57. Donc

$$t > -57, \quad t < -56; \quad t_1 = -57, \quad t_2 = -56.$$

Les équations

$$(-1)^{n-1}(a\alpha + b\beta)\, r = t_1 (a^2 + b^2) + \rho_1,$$
$$(-1)^{n-1}(a\alpha + b\beta)\, r = t_2 (a^2 + b^2) - \rho_2 (\text{IV}),$$

(*) *Mélanges mathématiques*, tome I, p. 25.

(**) Dans ce qui va suivre, nous supposerons 1° $a > 1$, $b > 1$; 2° c premier avec a et avec b; 3° $c > a + b$.

Si les deux dernières hypothèses n'étaient pas vérifiées, l'équation (1) pourrait être simplifiée; ou elle serait impossible; ou enfin, on aurait $x = 1$, $y = 1$.

(***) *Mathesis*, p. 131.

(IV) *Loc. cit.*

se réduisent à

$$-203.875 = -57.3\,170 + \rho_1, \quad -203.875 = -56.3\,170 - \rho_2.$$

Il résulte, de celles-ci :

$$\rho_1 = 57.3\,170 - 203.875 = 180.690 - 177.625 = 3\,065,$$
$$\rho_2 = -56.3\,170 + 203.875 = 177.625 - 177.520 = 105(*).$$

Reste, enfin, à former les binômes,

$$ar - b\rho_1, \quad br - a\rho_2\,(**).$$

Le premier égale

$$47.875 - 31.3\,065 = 41.125 - 95.015 = -53.890.$$

Le second :

$$31.875 - 47.105 = 27.125 - 4\,935 = +22.190.$$

Ainsi, *la proposée admet une solution positive.*

3. Si l'on résout, directement, l'équation

$$47\,x + 31\,y = 875,$$

on a, par le procédé connu(***),

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 47 & 31 & 16 & 15 & 1 \\ \hline 875 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{array};$$

puis

$$\frac{7}{1} = 7, \quad \frac{7 - 16.7}{15} = -7, \quad x = \frac{7 + 31.7}{16} = 14,$$

$$7 = \frac{875 - 47.14}{31} = 7 \cdot \frac{125 - 94}{31} = 7.$$

4. On voit que le calcul direct est préférable à l'emploi du *criterium*(IV).

Spa, 28 juin 1890.

(*) En observant que $\rho_1 + \rho_2 = a^2 + b^2$, on abrége, un peu, ce long calcul.

(**) A la p. 132, M. Lucas s'exprime ainsi : « *pour que l'équation* $ax + by = r$ *soit* « *possible en nombres entiers, il faut et il suffit que l'un des nombres* $ar - b\rho_1$, « $br - a\rho_2$ *ne soit pas négatif.* » Probablement, le savant Professeur a voulu dire : « il faut et il suffit que les quantités $ar - b\rho_1$, $br - a\rho_1$ (supposées différentes de « zéro), *soient de signes contraires.* »

(***) Attribué à *Pilatte*, mais, peut-être, bien antérieur.

(IV) En supposant $c = n(a + b) + c'$, $x = n - 1 + x'$, $y = n - 1 - y'$, on peut *réduire* l'équation proposée ; mais cette transformation ne paraît pas simplifier le problème.