

Article

SUR UN THÉORÈME DE M. OLTRAMARE.

in: Mathesis : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne | Mathesis - 8 | SUR UN THÉORÈME DE M. OLTRAMARE....

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:  
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

SUR UN THÉORÈME DE M. OLTRAMARE(\*).

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 272.)

I. *Démonstration de la première partie par M. E. CESÁRO.* Soit  $N$  un nombre entier, supérieur à l'unité, et  $N'$  la somme de ses diviseurs premiers. Si  $N = p^r$ ,  $p$  étant premier et  $r \geq 2$ , il est évident que  $N' = 1 + p < N$ , puisque déjà  $1 + p < p^2$ , pour  $p \geq 2$ . L'introduction de chaque nouveau facteur dans  $N$  accentue l'inégalité  $N' < N$ , car on ajoute à  $N'$  un certain nombre entier, et l'on multiplie  $N \geq 4$  par le même nombre. Si  $N$  est premier,  $N' = 1 + N > N$ . Lorsque  $N$  est le produit de plusieurs nombres premiers différents, on peut encore se borner à examiner le cas de  $N = pq$ , si l'on fait attention aux effets différents que l'introduction d'un nouveau facteur, nécessairement supérieur à 4, produit sur  $N$  et sur  $N'$ . On a  $N - N' = (p-1)(q-1) - 2$ . Par suite, à cause de  $p \geq 2$ ,  $q \geq 3$ , on voit que  $N' \leq N$ , l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour  $p = 2$ ,  $q = 3$ . Il en résulte que l'on a, en général,  $N' < N$ ; mais  $N' = N$ , si  $N = 6$ , et  $N' > N$  si  $N$  est premier. Dans ce dernier cas,  $N$  étant impair, le nombre  $N' = 1 + N$  renferme le facteur 2, et l'on sait que la somme des autres diviseurs premiers ne peut surpasser  $1 + \frac{1}{2}(1 + N)$ . Donc  $N'' \leq 3 + \frac{1}{2}(1 + N) < N$ , si  $N > 7$ . D'ailleurs, pour  $N = 7$ , on a  $N'' = 3 < N$ . Conséquemment, si l'on forme la suite  $N, N', N'', N''', \dots$ , on doit finir par rencontrer quelque terme égal ou inférieur à 6. Si l'on rencontre 6 ou 5, la suite finit par devenir 6, 6, 6, 6, 6, ... Si l'on rencontre 4, ou 3, ou 2, la suite finit par devenir 3, 4, 3, 4, 3, ...

II. *Théorème empirique, par M. CATALAN.* La proposition suivante,

(\*) Voici l'énoncé de ce théorème :

1° Soit  $N$  un nombre entier. Je fais la somme de tous les nombres premiers, facteurs de  $N$ , y compris l'unité (et  $N$ , si  $N$  est premier). Soit  $N'$  cette somme. J'opère sur  $N'$  comme j'ai opéré sur  $N$ ; soit  $N''$  le résultat. J'opère de même sur  $N''$ , et ainsi de suite. Démontrer que le résultat final sera toujours 3 ou 6.

2° Soit  $P$  un nombre quelconque, suffisamment grand. J'opère successivement sur tous les nombres de 1 à  $P$  comme j'ai opéré tantôt sur  $N$ . Si  $k$  est le nombre de fois que le résultat est 6,  $k'$  le nombre de fois qu'on obtient 3, le rapport ( $k : k'$ ) est toujours très voisin de  $\frac{1}{2}$  ou égal à  $\frac{1}{2}$ .

qui offre une grande analogie avec le théorème de M. Oltramare, a été vérifiée sur un grand nombre d'exemples :

Désignons par  $\sum n$  la somme des diviseurs de  $n$ , et posons

$$n_1 = -n + \sum n,$$

$$n_2 = -n_1 + \sum n,$$

.....

Pour une valeur donnée de  $n$ , les nombres  $n_1, n_2, n_3, \dots$  tendent vers l'unité ou vers un nombre parfait.

QUESTION DE LICENCE ;

par M. H. BROCARD, chef de bataillon du Génie (Grenoble).

(Suite; voir *Mathesis*, t. VII, p. 135.)

XXXVI. Intégrer l'équation différentielle

$$xy \frac{d^2y}{dx^2} + x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{dy}{dx} = 0; \quad (1)$$

montrer qu'on peut disposer de l'une des arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale, de manière que cette équation intégrale représente, en coordonnées rectangulaires, un faisceau de courbes coupant l'axe des  $y$  en deux points fixes; étudier les trajectoires orthogonales de ces courbes.

(CAEN; juillet 1885.)

Première solution. L'équation donnée peut s'écrire

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \frac{y'}{y}.$$

Les variables sont séparées et l'intégration donne

$$y' = C \frac{x}{y}, \quad y^2 = Cx^2 + C',$$

équation d'un système de coniques rencontrant l'axe des  $y$  en deux points fixes, si l'on suppose  $C'$  constant et  $C$  variable.

Le coefficient angulaire de la tangente à ces courbes a pour expression

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Cx}{y},$$