SUR UN THÉORÈME DE M. OLTRAMARE(*).

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 272.)

I. *Démonstration de la première partie par* M. E. Cesáro. Soit N un nombre entier, supérieur à l'unité, et N′ la somme de ses diviseurs premiers. Si $N = p^r$, p étant premier et $r \geqq 2$, il est évident que $N' = 1 + p < N$, puisque déjà $1 + p < p^2$, pour $p \geqq 2$. L'introduction de chaque nouveau facteur dans N *accentue* l'inégalité $N' < N$, car *on ajoute* à N′ un certain nombre entier, et l'*on multiplie* $N \geqq 4$ par le même nombre. Si N est premier, $N' = 1 + N > N$. Lorsque N est le produit de plusieurs nombres premiers différents, on peut encore se borner à examiner le cas de $N = pq$, si l'on fait attention aux effets différents que l'introduction d'un nouveau facteur, nécessairement supérieur à 4, produit sur N et sur N′. On a $N - N' = (p-1)(q-1) - 2$. Par suite, à cause de $p \geqq 2$, $q \geqq 3$, on voit que $N' \leqq N$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $p = 2$, $q = 3$. Il en résulte que l'on a, en général, $N' < N$; mais $N' = N$, si $N = 6$, et $N' > N$ si N est premier. Dans ce dernier cas, N étant impair, le nombre $N' = 1 + N$ renferme le facteur 2, et l'on sait que la somme des autres diviseurs premiers ne peut surpasser $1 + \frac{1}{2}(1 + N)$. Donc $N'' \leqq 3 + \frac{1}{2}(1 + N) < N$, si $N > 7$. D'ailleurs, pour $N = 7$, on a $N'' = 3 < N$. Conséquemment, si l'on forme la suite N, N′, N″, N‴, ..., on doit finir par rencontrer quelque terme égal ou inférieur à 6. Si l'on rencontre 6 ou 5, la suite finit par devenir 6, 6, 6, 6, 6, ... Si l'on rencontre 4, ou 3, ou 2, la suite finit par devenir 3, 4, 3, 4, 3, ...

II. *Théorème empirique, par* M. Catalan. La proposition suivante,

---

(*) Voici l'énoncé de ce théorème :

1° Soit N un nombre entier. Je fais la somme de tous les nombres premiers, facteurs de N, y compris l'unité (et N, si N est premier). Soit N′ cette somme. J'opère sur N′ comme j'ai opéré sur N; soit N″ le résultat. J'opère de même sur N″, et ainsi de suite. Démontrer que le résultat final sera toujours 3 ou 6.

2° Soit P un nombre quelconque, suffisamment grand. J'opère successivement sur tous les nombres de 1 à P comme j'ai opéré tantôt sur N. Si k est le nombre de fois que le résultat est 6, k' le nombre de fois qu'on obtient 3, le rapport $(k : k')$ est toujours très voisin de $\frac{1}{2}$ ou égal à $\frac{1}{2}$.

qui offre une grande analogie avec le théorème de M. Oltramare, a été vérifiée sur un grand nombre d'exemples :

Désignons par $\int n$ *la somme des diviseurs de* n, *et posons*

$$n_1 = -n + \int n,$$
$$n_2 = -n_1 + \int n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Pour une valeur donnée de n, *les nombres* $n_1, n_2, n_3, \ldots$ *tendent vers l'unité ou vers un nombre parfait.*

QUESTION DE LICENCE;

par M. H. Brocard, chef de bataillon du Génie (Grenoble).

(*Suite;* voir *Mathesis*, t. VII, p. 135.)

XXXVI. *Intégrer l'équation différentielle*

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0; \tag{1}$$

montrer qu'on peut disposer de l'une des arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale, de manière que cette équation intégrale représente, en coordonnées rectangulaires, un faisceau de courbes coupant l'axe des y *en deux points fixes; étudier les trajectoires orthogonales de ces courbes.*

(Caen; juillet 1885.)

Première solution. L'équation donnée peut s'écrire

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} - \frac{y'}{y}.$$

Les variables sont séparées et l'intégration donne

$$y' = C\frac{x}{y}, \quad y^2 = Cx^2 + C',$$

équation d'un système de coniques rencontrant l'axe des y en deux points fixes, si l'on suppose C′ constant et C variable.

Le coefficient angulaire de la tangente à ces courbes a pour expression

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Cx}{y},$$