quelconques, p nombres 6 ; le nombre total des résultats ainsi obtenus est

$$C_n^p \cdot 5^{n-p};$$

donc, la probabilité cherchée est

$$P = 1 - \left[\frac{6^n - C_n^p \cdot 5^{n-p}}{6^n}\right]^k.$$

SUR LA COURBE DE WATT,

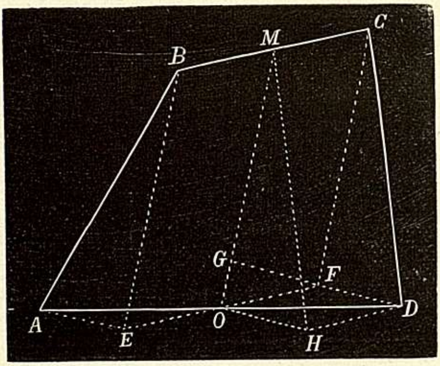
par M. E. Catalan, professeur à l'Université de Liège (*).

Problème. *Un quadrilatère* ABCD, *dont la base* AD *est fixe, et dans lequel les côtés* AB, CD *sont égaux, est articulé en* A, B, C, D. *Trouver l'équation du lieu décrit par le milieu* M *du quatrième côté.*

I. Lemme (**). *Si un quadrilatère a deux côtés opposés égaux : 1° ces côtés sont également inclinés sur la médiane des deux autres côtés; 2° la projection de chacun d'eux, sur la médiane, est égale à la médiane.*

1° Menons les droites BE, CF parallèles à la médiane MO; par le point O, menons EOF parallèle à BC. Enfin, traçons les droites AE, DF.

D'après la construction, BCFE est un parallélogramme ; donc BE = CF, OE = BM = MC = OF. Les triangles AOE, DOF sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun. Ainsi, AE = DF. De plus, ces droites sont *parallèles*; car les angles OAE, ODF, *alternes internes*, sont égaux.



Par suite, les triangles ABE, DCF sont égaux, parce qu'ils ont les côtés égaux, chacun à chacun. Donc *angle* ABE = *angle* DCF.

(*) La présente Note, abstraction faite des Remarques, a été rédigée en avril 1872. Si je la publie, c'est parce que la *Société des Sciences de Bordeaux* vient de faire paraître un Mémoire intitulé : *Théorie du Parallélogramme de Watt.*

(**) Énoncé et démontré dans le premier volume de la *Nouvelle Correspondance mathématique* (1874, pp. 31, 63, 161).

2° Les angles égaux AEB, DFC sont *supplémentaires*, à cause des situations respectives de leurs côtés. Donc *chacun d'eux est droit*. En même temps, *les droites* BE, CF *sont égales et parallèles aux projections, sur* MO, *de* AB, CD. Autrement dit, *ces* dernières *projections sont égales à la médiane*.

II. ÉQUATION DE LA COURBE. Soient $AO = OD = a$, $AB = CD = b$, $BM = CM = c$. Soient en outre, $OM = u$, $MOD = \omega$.

A cause du triangle rectangle CFD,

$$u^2 = b^2 - \overline{FD}^2.$$

Pour évaluer FD, prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre, en G, avec OM. Il est clair que :

$$FD = DG - FG = a \sin\omega - FG, \quad FG = \sqrt{c^2 - a^2\cos^2\omega}.$$

L'équation demandée est donc

$$u^2 = b^2 - \left[a\sin\omega - \sqrt{c^2 - a^2\cos^2\omega}\right]^2,$$

ou

$$u^2 + c^2 - b^2 = a^2\cos 2\omega + 2a\sin\omega\sqrt{c^2 - a^2\cos\omega}. \tag{1}$$

III. REMARQUES. 1° Cette équation (1) peut encore être écrite des trois manières suivantes :

$$(u^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2(b^2 - u^2)\sin^2\omega, \tag{2}$$

$$(b^2 - u^2)^2 - 2c^2(b^2 - u^2) + (a^2 - c^2)^2 + 2a^2(b^2 - u^2)\cos 2\omega = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}^2\omega = \frac{(u^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2c^2 - (u^2 + a^2 + c^2 - b^2)^2}. \tag{4}$$

2° Considérons le parallélogramme MCDH, dans lequel $MH = b$, $DH = c$. Si nous menons la droite OH, elle est perpendiculaire à OM (I, 2°). De là résulte le *dispositif* suivant, probablement *connu* et *peu pratique* :

La tige DH, *qui tourne librement autour du point fixe* D, *est articulée, en* H, *avec une seconde tige* HM. *Si les côtés d'un angle droit* HOM, *dont le sommet est fixe, glissent dans des ouvertures placées en* H, M; *l'extrémité* M *de la tige* HM *décrira la courbe de Watt*.

Liège, 11 juin 1885.