

Article

SUR UN THÉORÈME D'ABEL.

Catalan, E.

in: Mathesis : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne | Mathesis - 4 | SUR UN THÉORÈME D'ABEL.  
PRÉCIS...

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library  
For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:  
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

SUR UN THÉORÈME D'ABEL;

par E. CATALAN, professeur à l'Université de Liège.

I.

Le théorème de l'illustre Norvégien a été ainsi énoncé par l'auteur :  
« si la série

$$f(\alpha) = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \dots + v_m \alpha^m + \dots$$

« est convergente pour une certaine valeur  $\delta$  de  $\alpha$ , elle sera aussi convergente pour toute valeur moindre de  $\alpha$ , et, pour des valeurs toujours décroissantes de  $\beta$ , la fonction  $f(\alpha - \beta)$  s'approche indéfiniment de la limite  $f(\alpha)$ , supposé que  $\alpha$  soit égal ou inférieur à  $\delta$  (\*). »

II.

En 1862 parut, dans le *Journal de Mathématiques*, une Note ayant pour titre : *Démonstration d'un théorème d'Abel; Note de M. Lejeune-Dirichlet, communiquée par M. Liouville*. Voici le commencement et la fin de cette Note :

« Il s'agit de prouver que si la série

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

« est convergente et a pour somme A, la somme de la série

$$a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots + a_n \rho^n + \dots$$

« qui sera convergente à fortiori en prenant la variable  $\rho$  positive et  $< 1$ , tendra vers la limite A lorsque l'on fera tendre indéfiniment  $\rho$  vers l'unité (\*\*). Causant un jour avec mon excellent et si regrettable ami Lejeune-Dirichlet, je lui disais que je trouvais assez difficile à exposer (et même à comprendre) (\*\*\*) la démonstration qu'Abel a donnée de ce théorème important. Dirichlet se mit sur-le-champ à écrire sous

(\*) *Œuvres d'Abel*, première édition, tome I, p. 69; deuxième édition, p. 223.

(\*\*) Ces six lignes sont, pour ainsi dire, la traduction du texte d'Abel, rapporté ci-dessus.

(\*\*\*) Ici, je suis complètement d'accord avec mon excellent et si regrettable ami Liouville.

« mes yeux, dans le seul but de me venir en aide, la Note ci-après, qui  
« m'a été d'un grand secours et qu'on me saura gré de livrer au public.  
« Le mode de démonstration qu'on y trouve comporte de nombreuses  
« applications.

• • • • •  
« Je ne pense pas que personne puisse songer désormais à demander de  
« nouveaux éclaircissements. »

### III.

L'article du *Journal de Mathématiques* provoqua la lettre suivante, qui n'a jamais été publiée. Elle ne le serait pas encore aujourd'hui, si je ne la croyais propre à provoquer la discussion sur une partie, assez obscure, de la théorie des séries. Sauf peut-être en un seul point, mes opinions, touchant le théorème d'Abel et la démonstration de Dirichlet, n'ont pas varié. Ceci dit, voici la lettre :

« Mon cher M. Liouville,

« Votre numéro d'Août, que je reçois ce soir, me jette en de terribles  
« perplexités : d'un côté, le Théorème d'Abel me semble *évident* ; de l'autre,  
« la démonstration de Dirichlet exige, si je ne me trompe, *de nouveaux*  
« éclaircissements : je veux dire qu'elle est bien compliquée. Accordez-  
« moi, pour chacun de ces deux points, trois minutes d'attention.

« 1° Si une série

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + \dots \quad (1)$$

« est convergente pour toutes les valeurs positives de  $x$  qui ne dépassent  
« pas une certaine quantité  $b$ , de façon que, pour chacune de ces valeurs,  
« la somme de la série (c'est-à-dire la limite vers laquelle tend la somme  
« de ses  $n$  premiers termes, quand  $n$  augmente indéfiniment) soit  $F(x)$  ;  
« peut-on révoquer en doute l'exactitude de l'équation

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \dots = F(b) ?$$

« Autrement dit, peut-on contester celle-ci :

$$\lim F(x) = F \{ \lim x \} = F(b) ?$$

« 2° Quoi qu'il en soit, si le Théorème d'Abel a besoin d'être démontré

« (ce que je ne puis me persuader), voici un essai de démonstration (\*).

« Soient  $f_n(x)$  la somme des  $n$  premiers termes de la série (1),  $\varphi_n(x)$   
« le *reste* : cette dénomination est permise, puisque la série est conver-  
« gente. On aura

$$F(x) = f_n(x) + \varphi_n(x). \tag{2}$$

« Dans les deux membres, faisons tendre  $x$  vers  $b$  : la limite du premier  
« membre, étant égale à la somme des limites des deux parties qui  
« composent le second, on aura encore

$$F(b) = f_n(b) + \varphi_n(b)(**). \tag{3}$$

« Maintenant, faisons croître  $n$  indéfiniment : d'après l'hypothèse, le  
« terme  $f_n(b)$  tend vers une certaine limite  $B$ ; le terme  $\varphi_n(b)$  tend vers  
« zéro (\*\*\*) . D'ailleurs  $F(b)$ , ne contenant pas  $n$ , n'a pas changé; donc  
« enfin

$$F(b) = B. \tag{4}$$

« Votre bien affectionné et dévoué ancien élève,

E. CATALAN.

Paris, 23 janvier 1863 (9 h.  $\frac{1}{2}$ ).

« P. S. En relisant mon 2<sup>o</sup>, je m'aperçois qu'il n'ajoute rien à l'évi-  
« dence que je crois reconnaître dans le Théorème en question; et,  
« malgré moi, je pense aux gens difficiles qui voudraient démontrer ce  
« *postulatum*, moins célèbre que celui d'Euclide :

« *Deux points C, D, étant situés de part et d'autre d'une droite indéfinie*  
« *AB; la droite qui joint ces deux points coupe nécessairement AB.* »

#### IV.

Dans certains cas très rares, la somme désignée par  $f_n(b)$  est indépen-  
dante de  $n$  : cette somme est une simple constante. Par suite, le *reste*  $\varphi_n(b)$   
se réduit, aussi, à une constante. L'égalité (3), prenant la forme

$$F(b) = B + C, \tag{5}$$

(\*) Ici, trois lignes étrangères à l'objet en litige, et que, par ce motif, je supprime. (E. C.)

(\*\*) Selon nous, ceci revient à admettre que  $\varphi_n(x)$  et, par suite, que  $F(x)$  est fonction continue de  $x$  (P. M.)

(\*\*\*) Voir le paragraphe IV.

le raisonnement employé ci-dessus n'est plus applicable; et la formule (4) se change en la dernière (\*).

Soit, par exemple, la série

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots,$$

citée par Abel (\*\*). Pour toutes les valeurs de  $x$ , inférieures à  $\pi$ , on a, comme l'a trouvé Fourier (\*\*\*),  $F(x) = \frac{1}{2}x$ . En même temps,

$$f_n(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \pm \frac{1}{n} \sin nx.$$

Mais, lorsque  $x = \pi$ , la dernière somme s'annule : elle est donc *indépendante* de  $n$ . Aussi la formule (4), *appliquée mal à propos*, donne-t-elle ce résultat absurde :

$$\frac{\pi}{2} = 0.$$

## PRÉCIS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

(Suite; voir pages 5-13).

### \*II. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

**12. Fonctions circulaires.** Dans l'équation  $x^2 + y^2 = 1$  du cercle de rayon égal à l'unité, posons

$$y = \sin \theta,$$

pour un point quelconque  $m$ ,  $\theta$  étant une variable auxiliaire; on aura

$$x = \cos \theta.$$

La tangente au point  $m$ , ayant pour équation  $Xx + Yy = 1$ , a pour coordonnées à l'origine :

$$X = \frac{1}{x} = \sec \theta, \quad Y = \frac{1}{y} = \operatorname{cosec} \theta.$$

(\*) Si je ne me trompe, cette remarque, sur laquelle je reviendrai peut-être, rend compte de certaines difficultés, bien connues, que présentent les séries *périodiques*.

(\*\*) *Œuvres*, tome II, p. 267.

(\*\*\*) *Théorie de la Chaleur*, p. 238.