×QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DE M. E. CATALAN (*).

Ces théorèmes pouvant intéresser les lecteurs de *Mathesis*, nous allons en donner une analyse succincte.

1° Soit ABC un triangle quelconque, que nous supposerons, pour plus de simplicité, acutangle. Construisons les symétriques M, N, P des sommets A, B, C, relativement aux côtés BC, CA, AB, et désignons par A′, B′, C′ les intersections des droites BP et CN, CM et AP, AN et BM. Les triangles A′BC, B′CA, C′AB peuvent être appelés *annexes* de ABC.

On voit immédiatement que *les angles des triangles* A′BC, AB′C, ABC′ *sont égaux à* $\pi - 2A$, $\pi - 2B$, $\pi - 2C$. Par conséquent, *les annexes de* ABC *sont semblables au triangle* $A_1B_1C_1$ *qui a pour côtés les tangentes menées par* A, B, C *au cercle* ABC.

2° Soit O le centre du cercle ABC. Les angles BOC, COA, AOB, égaux à 2A, 2B, 2C sont les suppléments de A′, B′, C′, donc les *circonférences circonscrites aux annexes passent par* O. L'angle AOC est le supplément de l'angle A′BC qui, à cause du quadrilatère inscriptible A′BOC, est égal à A′OC ; AOA′ est donc une ligne droite : *les droites* AA′, BB′, CC′ *se coupent aussi au point* O.

3° AB et AC étant les bissectrices des angles CBP, BCN, A *est le centre d'un cercle exinscrit à l'annexe* A′BC. Soit α le point de la circonférence O, diamétralement opposé à A ; les droites αB, αC, perpendiculaires à AB, AC sont les bissectrices des angles B, C du triangle A′BC. Donc *les centres des cercles inscrits aux annexes sont à l'intersection de la circonférence* ABC *par les droites* AA′, BB′, CC′.

4° Des 2° et 3°, on déduit deux nouvelles constructions de l'annexe A′BC : 1° Le sommet A′ est à l'intersection de la circonférence BOC et de la droite AO ; 2° les côtés A′B, A′C sont les tangentes menées par B et C à la circonférence qui touche BC et qui a pour centre le point α, diamétralement opposé à A sur la circonférence ABC.

5° La circonférence A′BC passe par A_1, et OA en est un diamètre ; par suite, la droite A_1A', perpendiculaire à A′A, est parallèle à B_1C_1 et

(*) Extrait des *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1882.

bissectrice extérieure de l'angle CA'B. Il résulte de là que *les centres de deux cercles exinscrits à l'annexe* A'BC *sont à l'intersection de* AB *et* AC *par* $A'A_1$ *parallèle à* B_1C_1.

6° De ce que $A'A_1$ est parallèle B_1C_1, on conclut que *les droites* AA', BB', CC' *sont égales aux hauteurs du triangle* $A_1B_1C_1$. La circonférence O étant inscrite à $A_1B_1C_1$, un théorème connu donne la relation (*)

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{OA}. \tag{1}$$

7° Supposons le cercle O fixe et le triangle ABC variable. Alors :

a) Si la corde BC est fixe, A' décrit une circonférence; *b*) si A est fixe, A' parcourt la droite AO; *c*) enfin, si A et A' sont fixes, la corde BC tourne autour d'un point fixe I de la droite AA'. La dernière propriété peut se déduire de l'égalité

$$R^2 = OA' \cdot OI,$$

qui résulte de la similitude des triangles OBI, OA'B.

8° Les diagonales de l'hexagone A'CB'AC'B se coupent au point O. Donc *cet hexagone est circonscrit à une conique* (Théorème de Brianchon).

Les triangles ABC, A'B'C' étant homologiques, leurs côtés correspondants se coupent sur une même droite; donc *les côtés non homologues se coupent en six points d'une même conique* (Théorème de Pascal).

M Lepaige nous communique la généralisation suivante d'une partie des 2° et 8°. Soient M, N, P trois points *quelconques* pris sur les droites *quelconques* AH, BH, CH; l'hexagone BMCNAP dont les diagonales se coupent en un même point, est circonscrit à une conique. L'hexagone BA'CB'AC', formé comme au 1°, a les mêmes côtés que BMCNAP ; donc les diagonales AA', BB' CC' passent par un même point. De même, les droites MA', NB', PC' concourent en un même point.

Le 2° est aussi un cas particulier de la proposition suivante que nous avons signalée dans la *Nouvelle correspondance*, t. I, p. 112 : Sur les côtés d'un triangle ABC, on construit extérieurement les triangles A'BC, AB'C, ABC' semblables à un même triangle $A_1B_1C_1$; les circonférences circonscrites à ces triangles, et les droites AA', BB', CC' se coupent en

---

(*) Cette démonstration, qui diffère de celle de M. Catalan, précise le caractère de la relation (1).

un même point d'où l'on voit les côtés de ABC sous les angles $\pi - A_1$, $\pi - B_1$, $\pi - C_1$.

Voici un complément de cette proposition, qui nous a été suggéré par la note de M. Catalan : Les droites AA', BB', CC' rencontrent la circonférence ABC en trois points α, β, γ, d'où l'on voit les côtés des triangles A'BC, AB'C, ABC' sous les angles $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$.

Connaissant les points A', B', C' et les angles A_1, B_1, C_1, on peut retrouver le triangle ABC. Comment résoudre la question anologue pour la figure considérée par M. Catalan, c'est-à-dire comment retrouver le triangle ABC, connaissant les sommets A', B', C' des annexes, ou les symétriques M, N, P des sommets A, B, C relativement aux côtés opposés?

J. Neuberg.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (*).

+Question 149.

(Voir t. II, p. 144.)

On dispose la suite des nombres naturels de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1, \\ & & 2, & 3, & 4, \\ 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

Démontrer que la somme des nombres d'une horizontale quelconque est la somme de deux cubes consécutifs. (De Rocquigny.)

Cette question a été résolue par MM. Lambert, élève du collège de St Trond; Deru, élève de l'institut Postula (Liége); Polet, élève du collège de Huy; Servais et Prevost, élèves de l'école normale des sciences; J. Gillet, E. Cesáro, P. Bastin, Schoentjes, Rochetti et Pisani.

On peut résumer ces solutions comme il suit. Les $(n-1)$ premières horizontales renferment un nombre de termes exprimé par

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3) = (n-1)^2.$$

La n^e horizontale forme donc une progression arithmétique de $(2n-1)$

(*) Rectification : Le théorème empirique de M. Catalan, cité page 42, ligne 9, a été démontré pour le cas invoqué dans la solution 82, et même dans des cas plus généraux, par M. Gerono (N. A., 2e série, t. IX, p. 469-471, t. X, p. 204-206). Nous reviendrons sur cette question.