Article
QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.
in: Mathesis : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne | Mathesis - 3

tons la 2e à la 3e; enfin, dans la 2e colonne, substituons $2px_r$ à y_r^2. L'égalité (8) deviendra, à la suite de ces transformations,

$$| \, y_1 \quad x_1 \quad x_1^2 + y_1^2 \, | = 0;$$

elle exprime que *la circonférence décrite par les points d'incidence des trois normales issues d'un même point passe par le sommet de la parabole.*

(J. N.)

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Sur le principe de l'homogénéité.

La démonstration donnée dans le numéro de décembre, de *Mathesis*, est, me semble-t-il, beaucoup trop longue(*). Quant à la *décomposition en équations homogènes*, voici ce qu'on peut lire dans le *Manuel des candidats à l'Ecole polytechnique* (tome I, p. 297) :

« Il est visible... que les équations non homogènes

$$x^2 + y^2 + x^3 + y^3 = a^2 + b^3, \quad x^2 + y^2 - x^3 - y^3 = a^2 - b^3,$$

« déduites des équations homogènes

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^3 + y^3 = b^3,$$

« ne peuvent pas servir à résoudre ces dernières(**). »

En résumé :

1° Quand on exprime les conditions d'un problème de Géométrie, de Mécanique, de Physique, etc., et que les unités restent arbitraires, l'équation à laquelle on est conduit est, nécessairement, homogène par rapport à chacune de ces unités.

2° Il est inutile de dire qu'une équation non homogène se décompose en équations homogènes.

Liège, 17 décembre 1882. E. CATALAN.

(*) Le savant et spirituel Terquem me disait, un jour : « Le principe de l'homogénéité se réduit à ceci : *on ne peut ajouter des pommes de terre et des bouteilles de champagne.* » Je crois qu'il avait raison.

(**) « L'équation non homogène

$$x^2 + y^2 + x^3 + y^3 = a^2 + b^3,$$

« déduite des équations homogènes

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^3 + y^3 = b^3,$$

« ne peut servir à rien, si ce n'est à prouver l'inhabileté de celui qui l'aurait « écrite. » (*Application de l'Algèbre à la Géométrie.* — 1848.)

NOTE. Nous ne sommes pas tout à fait d'accord avec notre savant collègue de l'université de Liège, touchant le principe de l'homogénéité.

Nous ne croyons pas que la démonstration de M. Colart soit trop longue, d'abord parce qu'elle s'adresse à des élèves ; ensuite, parce que la notion de l'homogénéité n'est pas aussi simple qu'elle paraît. L'illustre Legendre, faute d'avoir bien saisi cette notion, n'a-t-il pas cru, jusqu'à la fin de sa vie, que la soi-disant démonstration analytique du postulatum d'Euclide, qu'il a donnée dans la note II de ses Eléments, était irréprochable? N'est-ce pas pour la même raison que ses contradicteurs n'ont pu lui faire toucher du doigt l'erreur de son raisonnement? Si des géomètres de profession comprennent quelquefois de travers le principe de l'homogénéité, on peut bien, ce semble, l'expliquer, même un peu longuement, à des élèves, à des commençants (*).

Les équations non homogènes (**) peuvent se présenter *légitimement* dans les calculs, de deux manières : 1° Lorsque les unités ne sont pas arbitraires; 2° Lorsque, par inadvertance, on combine par addition et soustraction, des équations homogènes de degré différent. En outre, on introduit parfois des équations non homogènes, dans l'étude analytique d'une question, d'une manière *illégitime*, en commettant des erreurs de calcul, par exemple, en oubliant un exposant, un dénominateur. Tant qu'il y aura des calculateurs maladroits, il faudra bien signaler dans les manuels ces trois sortes d'équations non homogènes; en particulier, il faudra distinguer les deux premières, dont les unes jouissent de la propriété de pouvoir se décomposer en équations homogènes, tandis que les autres n'en jouissent pas. Si l'on ne parlait pas explicitement de cette différence aux élèves, ils pourraient confondre ces diverses catégories d'équations non homogènes.

Quant à la boutade de Terquem, elle nous semble à côté de la question. Dans les applications de l'analyse à la géométrie et à la mécanique, on ne rencontre jamais des *grandeurs concrètes*, mais seulement des

---

(*) L'erreur de Legendre n'est bien mise en lumière, pensons-nous, que dans le *Cours de Méthodologie mathématique* de M. Dauge (Gand, Hoste, 1883, vol. in-4° de 416 pages, lithographié). Voir Ch. IV, § 3, page 176-180, n° 154.

(**) Nous ne parlons pas des équations *en apparence* non homogènes, par exemple l'équation générale des coniques : $ax^2 + by^2 + c + 2hxy + 2gx + 2fy = 0$, où a, b, h sont de degré 0, g et f de degré 1, c de degré 2.

nombres qui les mesurent. En raisonnant comme le spirituel fondateur des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, on pourrait dire : « On ne peut pas faire entrer, dans une même relation algébrique, des longueurs, des aires et des volumes. » On le peut cependant, si l'on établit des relations entre les unités de longueur, de surface et de volume. C'est pour n'avoir pas songé à cela que Legendre s'est trompé, dans la note II de ses Éléments. (P. M.)

RÉPLIQUE. Supposez que vous rencontriez l'équation *ridicule* (mais non *absurde*) :

$$x \text{ pommes} + y \text{ bouteilles} = x' \text{ pommes} + y' \text{ bouteilles}.$$

Admettez-vous que

$$x = x', \quad y = y' ?$$

Si vous n'admettez pas cette *proposition*, comment la démontrez-vous (*) ?

Là est toute la question.

P. S. Votre dernier exemple n'est pas *topique* : des *longueurs*, des *aires* et des *volumes* sont des *nombres* (**).

Liège, 27 janvier 1883. (E. C.)

(*) L'équation se présentera sous la forme $x + y = x' + y'$, puisque, en analyse, toutes les relations trouvées sont en nombres abstraits. En changeant d'unité pour l'une des espèces de quantités, en comptant, par exemple, par demi-pommes, il viendra $2x + y = 2x' + y'$; d'où, aisément, en soustrayant la relation $x + y = x' + y'$, $x = x'$, puis $y = y'$. Si les unités ne sont pas arbitraires, on peut avoir $x + y = x' + y'$ sans que $x = x'$, $y = y'$ (P. M.).

(**) Evidemment, mais ce sont des nombres mesurant certaines grandeurs concrètes (P. M.).