MATHESIS

×QUESTION D'EXAMEN(*).

Maximum et minimum de la fonction $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$,

par M. E. Catalan, professeur à l'Université de Liége(**).

I. En supposant a' différent de zéro(***), on a

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\left(b - \dfrac{ab'}{a'}\right)x + \left(c - \dfrac{ac'}{a'}\right)}{a'x^2 + b'x + c'};$$

puis, si l'on fait, pour abréger,

$$f = ba' - ab', \quad g = ca' - ac' : \tag{1}$$

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{fx + g}{a'(a'x^2 + b'x + c')}. \tag{2}$$

II. Si f est différent de zéro(IV), le nouveau numérateur prend la forme $f(x - \alpha)$, pourvu que

$$\alpha = -\frac{g}{f} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}. \tag{3}$$

(*) Les articles marqués d'une croix peuvent être compris, les questions marquées d'une croix peuvent-être résolues, en ne s'aidant que des mathématiques élémentaires. (P. M.)

(**) Cette question, bien connue, a été traitée récemment, dans divers recueils ; mais avec des développements et des complications que le sujet ne comporte guère.

Nous sommes heureux d'insérer en tête du deuxième volume de *Mathesis*, la solution, si remarquablement simple, due à notre savant collègue de Liége. Nous saisissons cette occasion pour apprendre à nos lecteurs que M. Catalan vient d'être nommé Correspondant de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. (P. M.)

(***) Lorsque a' est nul, on applique la discussion suivante à la fonction

$$\frac{1}{y} = \frac{b'x + c'}{ax^2 + bx + c}.$$

(IV) Dans le cas contraire, le problème se ramène à la discussion de $\dfrac{g}{a'x^2 + b'x + c'}$.

Soient alors :

$$y = \frac{a}{a'} + \mathrm{Y}, \qquad x = \alpha + \mathrm{X}. \tag{4}$$

Au moyen de ces abréviations, l'égalité (2) devient

$$\frac{a'}{f}\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}}{a'(\mathrm{X}+\alpha)^2 + b'(\mathrm{X}+\alpha) + c'};$$

ou

$$\frac{a'}{f}\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{AX}^2 + \mathrm{BX} + \mathrm{C}},$$

ou encore

$$\frac{f}{a'}\frac{1}{\mathrm{Y}} = \mathrm{AX} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{X}} + \mathrm{B}. \tag{5}$$

III. Il est visible que les maximums ou minimums de y répondent à ceux de Y, puis à ceux de $\frac{1}{\mathrm{Y}}$; etc.(*) Le problème se réduit donc à la *détermination du maximum et du minimum de*

$$\mathrm{S} = \mathrm{AX} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{X}}. \tag{6}$$

Le produit des deux parties de S est égal à AC. Donc :

1° *Si* A *et* C *sont de même signe, on doit prendre*(**)

$$\mathrm{X} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}; \tag{7}$$

en sorte que la fraction proposée a un maximum et un minimum(***);

2° *Si* A *et* C *sont de signes contraires,* y *n'a ni maximum ni minimum.*

IV. Dans les formules (5), (6) :

$$\mathrm{A} = a', \quad \mathrm{C} = a'(ac' - ca')^2 + b'(ac' - ca')(ba' - ab') + c'(ba' - ab')^2$$
$$= a'c[a'^2c + b'(ab' - ba')] + a'c'[a^2c' - b(ab' - ba')] - 2aa'^2cc'.$$

(*) Pour ne pas confondre un maximum avec un minimum, on pourrait désigner ces deux quantités, à la fois, sous le nom de *valeurs limites*.

(**) *Si deux facteurs positifs forment un produit constant, leur somme est la plus petite possible quand ils sont égaux.*

(***) Il y a un cas exceptionnel, sur lequel nous reviendrons.

Donc la condition $\frac{C}{A} > 0$ devient

$$c^2a'^2 + c'^2a^2 - 2aa'cc' + (ab' - ba')(cb' - bc') > 0,$$

ou

$$(ac' - ca')^2 > (ab' - ba')(bc' - cb'). \tag{8}$$

Ainsi, *quand la condition* (8) *est remplie, la fraction* y *a un maximum et un minimum.*

V. *Remarque.* On ne peut pas supposer

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb');$$

car alors, d'après une propriété connue, les équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

auraient une racine commune; et la fraction donnée serait *réductible.*

VI. *Autre remarque.* Si, dans la formule (7), $C = \frac{B^2}{4A}$, on trouve

$$X = \pm \frac{B}{2A}.$$

De ces deux valeurs, la seconde annule $AX^2 + BX + \frac{B^2}{4A}$; et, par conséquent, rend infini Y (II) : elle ne correspond donc ni à un maximum ni à un minimum. Dans ce cas, la formule (7) doit être remplacée par

$$X = \frac{B}{2A}: \tag{7bis}$$

la fraction donnée, dont le dénominateur est un carré, a un maximum ou un minimum (*).

(*) Le *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre* de M. Catalan contient divers cas particuliers du problème précédent. Au moment de mettre sous presse, nous apprenons que M. Desboves, dans ses *Questions d'Algèbre,* traite la question exposée ici à peu près comme M. Catalan. Des coïncidences de ce genre sont inévitables en mathématiques élémentaires et elles prouvent la nécessité de recueils comme le nôtre, où l'on vulgarise les solutions élégantes, mais trop peu connues, de questions anciennes. (P. M.)