

Article

QUESTION D'EXAMEN.

Catalan, E.

in: Mathesis : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne | Mathesis - 2

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:  
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# MATHESIS

×QUESTION D'EXAMEN(\*).

**Maximum et minimum de la fonction**  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ ,

par M. E. CATALAN, professeur à l'Université de Liège(\*\*).

I. En supposant  $a'$  différent de zéro(\*\*\*), on a

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\left(b - \frac{ab'}{a'}\right)x + \left(c - \frac{ac'}{a'}\right)}{a'x^2 + b'x + c'};$$

puis, si l'on fait, pour abrégér,

$$f = ba' - ab', \quad g = ca' - ac' : \quad (1)$$

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{fx + g}{a'(a'x^2 + b'x + c')}. \quad (2)$$

II. Si  $f$  est différent de zéro(<sup>iv</sup>), le nouveau numérateur prend la forme  $f(x - \alpha)$ , pourvu que

$$\alpha = -\frac{g}{f} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}. \quad (3)$$

(\*) Les articles marqués d'une croix peuvent être compris, les questions marquées d'une croix peuvent-être résolues, en ne s'aidant que des mathématiques élémentaires. (P. M.)

(\*\*) Cette question, bien connue, a été traitée récemment, dans divers recueils; mais avec des développements et des complications que le sujet ne comporte guère.

Nous sommes heureux d'insérer en tête du deuxième volume de *Mathesis*, la solution, si remarquablement simple, due à notre savant collègue de Liège. Nous saisissons cette occasion pour apprendre à nos lecteurs que M. Catalan vient d'être nommé Correspondant de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. (P. M.)

(\*\*\*) Lorsque  $a'$  est nul, on applique la discussion suivante à la fonction

$$\frac{1}{y} = \frac{b'x + c'}{ax^2 + bx + c}.$$

(<sup>iv</sup>) Dans le cas contraire, le problème se ramène à la discussion de

$$\frac{g}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

Soient alors :

$$y = \frac{a}{a'} + Y, \quad x = \alpha + X. \quad (4)$$

Au moyen de ces abréviations, l'égalité (2) devient

$$\frac{a'}{f} Y = \frac{X}{a'(X + \alpha)^2 + b'(X + \alpha) + c'};$$

ou

$$\frac{a'}{f} Y = \frac{X}{AX^2 + BX + C},$$

ou encore

$$\frac{f}{a'} \frac{1}{Y} = AX + \frac{C}{X} + B. \quad (5)$$

III. Il est visible que les maximums ou minimums de  $y$  répondent à ceux de  $Y$ , puis à ceux de  $\frac{1}{Y}$ ; etc. (\*) Le problème se réduit donc à la *détermination du maximum et du minimum de*

$$S = AX + \frac{C}{X}. \quad (6)$$

Le produit des deux parties de  $S$  est égal à  $AC$ . Donc :

1° Si  $A$  et  $C$  sont de même signe, on doit prendre(\*\*)

$$X = \pm \sqrt{\frac{C}{A}}; \quad (7)$$

en sorte que la fraction proposée a un maximum et un minimum(\*\*\*);

2° Si  $A$  et  $C$  sont de signes contraires, y n'a ni maximum ni minimum.

IV. Dans les formules (5), (6) :

$$\begin{aligned} A &= a', \quad C = a'(ac' - ca')^2 + b'(ac' - ca')(ba' - ab') + c'(ba' - ab')^2 \\ &= a'c[a'^2c + b'(ab' - ba')] + a'c'[a^2c' - b(ab' - ba')] - 2aa'^2cc'. \end{aligned}$$

(\*) Pour ne pas confondre un maximum avec un minimum, on pourrait désigner ces deux quantités, à la fois, sous le nom de *valeurs limites*.

(\*\*) Si deux facteurs positifs forment un produit constant, leur somme est la plus petite possible quand ils sont égaux.

(\*\*\*) Il y a un cas exceptionnel, sur lequel nous reviendrons.

Donc la condition  $\frac{C}{A} > 0$  devient

$$c^2a'^2 + c'^2a^2 - 2aa'cc' + (ab' - ba')(cb' - bc') > 0,$$

ou

$$(ac' - ca')^2 > (ab' - ba')(bc' - cb'). \quad (8)$$

Ainsi, quand la condition (8) est remplie, la fraction y a un maximum et un minimum.

V. *Remarque.* On ne peut pas supposer

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb');$$

car alors, d'après une propriété connue, les équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

auraient une racine commune; et la fraction donnée serait *réductible*.

VI. *Autre remarque.* Si, dans la formule (7),  $C = \frac{B^2}{4A}$ , on trouve

$$X = \pm \frac{B}{2A}.$$

De ces deux valeurs, la seconde annule  $AX^2 + BX + \frac{B^2}{4A}$ ; et, par conséquent, rend infini Y (II): elle ne correspond donc ni à un maximum ni à un minimum. Dans ce cas, la formule (7) doit être remplacée par

$$X = \frac{B}{2A}; \quad (7^{bi})$$

la fraction donnée, dont le dénominateur est un carré, a un maximum ou un minimum (\*).

(\*) Le *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre* de M. Catalan contient divers cas particuliers du problème précédent. Au moment de mettre sous presse, nous apprenons que M. Desboves, dans ses *Questions d'Algèbre*, traite la question exposée ici à peu près comme M. Catalan. Des coïncidences de ce genre sont inévitables en mathématiques élémentaires et elles prouvent la nécessité de recueils comme le nôtre, où l'on vulgarise les solutions élégantes, mais trop peu connues, de questions anciennes. (P. M.)