et, dans la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$-5, \quad -14, \quad -2, \quad -18, \quad -23, \quad -22.$$

Donc l'équation n'a qu'une seule racine positive, laquelle est plus grande que l'unité.

REMARQUES SUR UNE SÉRIE.

I. Soit

$$f(x) = \frac{x^4}{1-x^2} + \frac{x^9}{1-x^3} + \frac{x^{16}}{1-x^4} + \frac{x^{25}}{1-x^5} + \cdots, \quad . \quad (1)$$

série dont le terme général a la forme $\frac{x^{(n^2)}}{1-x^n}$. Le développement de cette fraction est

$$x^{n.n} + x^{n(n+1)} + x^{n(n+2)} + \cdots\cdot$$

Par conséquent :

1° *La série* (1), *ordonnée suivant les puissances de* x, *devient*

$$x^4 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + 2x^{12} + x^{14} + 2x^{16} + \cdots + A_N x^N + \cdots; \quad (2)$$

2° *L'exposant* N *est le produit de deux facteurs, autres que l'unité;*

3° *Si* N *n'est pas un carré,* A_N *égale la moitié du nombre des diviseurs de* N, *diminuée de* 1;

4° *Si* N *est un carré,* A_N *égale cette moitié, diminuée de* $\frac{1}{2}$.

II. Attribuons à N une valeur déterminée, et prenons la dérivée $N^{\text{ième}}$ de $f(x)$. Nous aurons

$$\frac{d^N f(x)}{dx^N} = 1.2.3\ldots NA_N + (N'-N+1)(N'-N+2)\ldots N'A_{N'}x^{N'-N} + \cdots;$$

et, en faisant $x=0$:

$$\left[\frac{d^N f(x)}{dx^N}\right]_{x=0} = 1.2.3\ldots N.A_N.$$

Au contraire, p étant autre que 4, 6, 8, 9, ..., N, ... c'est-à-dire *p étant premier :*

$$\left[\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right]_{x=0} = 0.$$

Ainsi, *le nombre* p *est premier ou non, selon que la dérivée* p^ième^ *de* f(x) *s'annule avec* x, *ou ne s'annule pas* (*).

III. La célèbre *série de Lambert :*

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

a pour développement

$$\varphi(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + \cdots + B_N x^N + \cdots, \quad (4)$$

B_N étant le *nombre des diviseurs de* N.

D'après ce qui précède (3°, 4°), si, à $2f(x)$, ou

$$2x^4 + 2x^6 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + 4x^{12} + \cdots + 2A_N x^N + \cdots,$$

on ajoute

$$\begin{array}{llllllllll} 2x + & 2x^2 + & 2x^3 + & 2x^4 + & 2x^5 + & 2x^6 + & 2x^7 + & 2x^8 + & 2x^9 + & 2x^{10} + \cdots \\ -x & & & -x^4 & & & & & -x^9 & \end{array}$$

le résultat est $\varphi(x)$ (**).

(*) Cette proposition ne diffère pas d'un théorème proposé par M. Radicke (*Question* 559).

(**) En effet, lorsque N est *non-carré*, le coefficient de x^N devient

$$2(\tfrac{1}{2}B_N - 1) + 2 = B_N;$$

et, lorsque N est *carré :*

$$2(\tfrac{1}{2}B_N - \tfrac{1}{2}) + 2 - 1 = B_N.$$

Ainsi

$$\varphi(x) = 2\frac{x}{1-x} + 2\frac{x^4}{1-x^2} + 2\frac{x^9}{1-x^3} + 2\frac{x^{16}}{1-x^4} + \cdots$$
$$\quad -x \qquad -x^4 \qquad -x^9 \qquad -x^{16} - \cdots,$$

ou

$$\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \cdots \quad . \quad . \quad (5)$$

Cette transformation de la série de Lambert est due à Clausen (*).

E. Catalan.

SUR LA FRÉQUENCE ET LA TOTALITÉ DES NOMBRES PREMIERS;

par M. H. Brocard, capitaine du Génie, à Alger.

(*Suite*, voir t. V, pp. 1, 33, 65, 113, 263, 370 et 437.)

IX

L'évaluation de la totalité des nombres premiers, inférieurs à une limite donnée, a exercé, comme on le voit, la sagacité de bien des analystes. Gauss, Encke, Legendre, Riemann, M. Tchebychef se sont proposé de fixer une approximation suffisante pour la pratique; mais d'autres calculateurs ont cherché des formules exactes, donnant la solution rigoureuse et complète.

Nous signalerons, pour commencer, les recherches entreprises

(*) Maximilien Curtze. *Annali di Matematica*, t. I, 1867.