

Periodical

Nouvelle correspondance mathématique

in: Nouvelle correspondance mathématique | Periodical

681 page(s)

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersaechische Staats- und Universitaetsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

et, dans la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$-3, -14, -2, -18, -23, -22.$$

Donc l'équation n'a qu'une seule racine positive, laquelle est plus grande que l'unité.

REMARQUES SUR UNE SÉRIE.

I. Soit

$$f(x) = \frac{x^4}{1-x^2} + \frac{x^9}{1-x^5} + \frac{x^{16}}{1-x^4} + \frac{x^{25}}{1-x^5} + \dots, \quad (1)$$

série dont le terme général a la forme $\frac{x^{(n^2)}}{1-x^n}$. Le développement de cette fraction est

$$x^{n \cdot n} + x^{n(n+1)} + x^{n(n+2)} + \dots$$

Par conséquent :

1° La série (1), ordonnée suivant les puissances de x , devient $x^4 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + 2x^{12} + x^{14} + 2x^{16} + \dots + A_N x^N + \dots$; (2)

2° L'exposant N est le produit de deux facteurs, autres que l'unité;

3° Si N n'est pas un carré, A_N égale la moitié du nombre des diviseurs de N , diminuée de 1;

4° Si N est un carré, A_N égale cette moitié, diminuée de $\frac{1}{2}$.

II. Attribuons à N une valeur déterminée, et prenons la dérivée $N^{\text{ième}}$ de $f(x)$. Nous aurons

$$\frac{d^N f(x)}{dx^N} = 1.2.3 \dots N A_N + (N' - N + 1)(N' - N + 2) \dots N' A_N x^{N' - N} + \dots;$$

et, en faisant $x = 0$:

$$\left[\frac{d^N f(x)}{dx^N} \right]_{x=0} = 1.2.3 \dots N. A_N.$$

Au contraire, p étant autre que 4, 6, 8, 9, ..., N, ... c'est-à-dire p étant premier :

$$\left[\frac{d^p f(x)}{dx^p} \right]_{x=0} = 0.$$

Ainsi, le nombre p est premier ou non, selon que la dérivée $p^{\text{ième}}$ de $f(x)$ s'annule avec x , ou ne s'annule pas (*).

III. La célèbre série de Lambert :

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \dots, \dots \dots \dots (3)$$

a pour développement

$$\varphi(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 2x^5 + \dots + B_N x^N + \dots, \quad (4)$$

B_N étant le nombre des diviseurs de N .

D'après ce qui précède (3°, 4°), si, à $2f(x)$, ou

$$2x^4 + 2x^5 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + 4x^{12} + \dots + 2A_N x^N + \dots,$$

on ajoute

$$\begin{array}{ccccccc} 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + \dots \\ -x & & & -x^4 & & & & -x^9 & & \end{array}$$

le résultat est $\varphi(x)$ (**).

(*) Cette proposition ne diffère pas d'un théorème proposé par M. Radicke (*Question 559*).

(**) En effet, lorsque N est non-carré, le coefficient de x^N devient

$$2\left(\frac{1}{2} B_N - 1\right) + 2 = B_N;$$

et, lorsque N est carré :

$$2\left(\frac{1}{2} B_N - \frac{1}{2}\right) + 2 - 1 = B_N.$$

Ainsi

$$\varphi(x) = 2 \frac{x}{1-x} + 2 \frac{x^4}{1-x^2} + 2 \frac{x^9}{1-x^3} + 2 \frac{x^{16}}{1-x^4} + \dots$$

$$-x \quad -x^4 \quad -x^9 \quad -x^{16} \dots,$$

ou

$$\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x} x + \frac{1+x^2}{1-x^2} x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3} x^9 + \dots \quad (5)$$

Cette transformation de la série de Lambert est due à Clausen (*).
E. CATALAN.

SUR LA FRÉQUENCE ET LA TOTALITÉ DES NOMBRES PREMIERS;

par M. H. BROCARD, capitaine du Génie, à Alger.

(Suite, voir t. V, pp. 1, 33, 65, 113, 265, 370 et 437.)

IX

L'évaluation de la totalité des nombres premiers, inférieurs à une limite donnée, a exercé, comme on le voit, la sagacité de bien des analystes. Gauss, Encke, Legendre, Riemann, M. Tchebychef se sont proposé de fixer une approximation suffisante pour la pratique; mais d'autres calculateurs ont cherché des formules exactes, donnant la solution rigoureuse et complète.

Nous signalerons, pour commencer, les recherches entreprises

(*) MAXIMILIEN CURTZE. *Annali di Matematica*, t. I, 1867.