Les expressions de b_n et c_n sont semblables à celle-ci.

L'inclinaison des divers côtés a_n sur l'un d'eux, a, pris pour base, est également facile à déterminer.

Par suite, on aura tous les éléments nécessaires pour exprimer la suite générale des termes qui représentent les coordonnées du point limite D. C'est une question que nous proposons comme exercice à nos Collaborateurs.

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$ (*).

I

Une lettre de Fuss à Condorcet, rappelée par M. Darboux (**), contient le passage suivant :

« ... la formule intégrale

$$\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4},$$

» qu'il (Euler) observe pouvoir être rendüe rationelle (***)
» moyennant la substitution singulière

$$x = \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}},$$

(*) A propos d'un travail de M. Hermite, publié dans le *Journal de Mathématiques* (janvier 1880).

(**) *Bulletin des Sciences*, mai 1879, p. 226.

(***) C'est, bien entendu, la *différentielle* qui peut être rendue rationnelle.

» quoiqu'il ait cru autrefois qu'il soit impossible de la réduire à
» la rationalité par quelque substitution que ce soit, parce qu'il
» en pouvoit (*) exprimer l'intégrale par des logarithmes et des
» arcs de cercles... »

Je vais montrer, dans cette courte Note, que la substitution employée par Euler, au lieu d'être *singulière*, est, pour ainsi dire *forcée*, en ce sens qu'elle est la résultante de plusieurs transformations simples et connues.

II

Soit

$$dy = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

1° Si l'on fait

$$x = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\ (^{**}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ou trouve :

$$dx = \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi}, \qquad 1 - x^4 = 4\,\frac{\cos\varphi}{(1+\cos\varphi)^2},$$

$$1 + x^4 = 4\,\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}, \quad \sqrt{1+x^4} = 2\,\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{(1+\cos\varphi)^2}\,d\varphi\,;$$

puis

$$dy = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\,d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2° Faisons

$$\sin\varphi = z\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{dz}{1-z^2}.$$

(*) Plus loin, nous reviendrons sur ce mot.

(**) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 9.

L'équation (3) devient

$$dy = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}z^2}}{1 - z^2}\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ainsi, y *n'est pas une intégrale elliptique* (*).

3° Pour faire disparaître le radical, on peut poser

$$\frac{z}{\sqrt{2}} = \sin\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De là résulte, immédiatement,

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos^2\theta\, d\theta}{1 - 2\sin^2\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

4° Enfin, la transformation habituelle :

$$\operatorname{tg}\theta = t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

donne

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dt}{(1 - t^2)(1 + t^2)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ou

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{dt}{1 + t^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{dt}{t + 1} - \frac{dt}{t - 1}\right).$$

L'intégrale est donc

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg} t + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\,\frac{t + 1}{t - 1} + const. \quad . \quad . \quad (10)$$

(*) D'après cela, dans le fragment rapporté plus haut, ne doit-on pas lire *pourroit*, au lieu de *pouvoit?* Si, *a priori*, Euler regardait $\frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^4}\,dx$ comme la différentielle d'une *intégrale elliptique*, il devait conclure, comme le dit Fuss, à l'impossibilité de la rendre rationnelle.

III

Des formules (2), (4), (6), (8), on tire, successivement :

$$x = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}$$

$$= \frac{1-\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}{\sqrt{2}\sin\theta} = \frac{1-\sqrt{1-\dfrac{2t^2}{1+t^2}}}{\sqrt{2}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}};$$

et enfin

$$x = \frac{\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{2}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ce qui, sauf une insignifiante différence de signes (*), est la transformation employée par Euler. Celle-ci, comme je l'ai dit en commençant, était donc *forcée*.

IV

L'équation (11) donne,

$$t = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}.$$

On peut donc prendre, au lieu de l'intégrale (10),

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\,\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}-\sqrt{1+x^4}} + const.;$$

(*) Dans

$$x = \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}},$$

on peut convenir de prendre négativement le second radical, afin que $p = 0$ donne $x = 0$.

ou, sous une forme un peu plus simple,

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,sin}\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}-\sqrt{1+x^4}}\right] + const.$$

Si l'intégrale est comptée à partir de $x = 0$, on a

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,sin}\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}\right],$$

ou enfin

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,sin}\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + \mathrm{l}\,\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2}\right] \text{(*)}.$$

(E. Catalan.)

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES DÉTERMINANTS HÉMISYMÉTRIQUES D'ORDRE PAIR;

par M. C. Le Paige.

Dans une étude récente sur certains covariants des formes algébriques, nous avons été conduit à une propriété des déterminants *hémisymétriques* (**) d'ordre pair, qui n'a pas encore été signalée, croyons-nous.

(*) Formule connue (*Cours d'Analyse*, p. 138).

(**) On entend, comme l'on sait, par déterminants hémisymétriques, les déterminants pour lesquels $a_{ki} = a_{ik}$, $a_{ii} = 0$. On peut voir, sur ce sujet, notre Note insérée aux *Sitzb. der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften*, mars 1880.