Question 585.

Calculer les valeurs des angles x *et* y *qui satisfont aux relations*

$$(2 + \cos 2x + \sin 2x)\sin 2y + (\cos x + \sin x)\cos 2y = 0, \quad (1)$$

$$2(\cos 2x - \sin 2y)\sin y + (\cos x - \sin x)\cos y = 0. \quad (2)$$

(Collége St-Louis, 1833.)

On tire, de l'équation (1),

$$\operatorname{tg} 2y = -\frac{\cos x + \sin x}{2 + \cos 2x + \sin 2x}; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

et, de l'équation (2) :

$$\operatorname{tg} y = -\frac{\cos x - \sin x}{2(\cos 2x - \sin 2x)}. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Or,

$$\operatorname{tg} 2y = \frac{2\operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg}^2 y};$$

donc, après suppression du facteur $\cos 2x - \sin 2x$, commun aux deux termes d'une fraction,

$$\frac{\cos x + \sin x}{2 + \cos 2x + \sin 2x} = \frac{4(\cos x - \sin x)(\cos 2x - \sin 2x)}{4(\cos 2x - \sin 2x)^2 - (\cos x - \sin x)^2}. \quad (5)$$

Si l'on chasse les dénominateurs et que l'on effectue quelques simplifications, cette équation (5) devient, successivement :

$$\begin{aligned} &4(\cos 2x - \sin 2x)^2(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)^2 \\ &= 8(\cos x - \sin x)(\cos 2x - \sin 2x) \\ &\quad + 4(\cos x - \sin x)(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4(\cos 2x - \sin 2x) \\ &\left[(\cos 2x - \sin 2x)(\cos x + \sin x) - (\cos 2x + \sin 2x)(\cos x - \sin x)\right] \\ &= (\cos x - \sin x)\left[\cos^2 x - \sin^2 x + 8\cos 2x - 8\sin 2x\right], \end{aligned}$$

$$8(\cos 2x - \sin 2x)\sin x + (\cos x - \sin x)(9\cos 2x - 8\sin 2x) = 0,$$

$$8(\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x)\sin x$$
$$+ (\cos x - \sin x)(9\cos^2 x - 9\sin^2 x - 16\sin x\cos x) = 0. \quad (6)$$

L'équation est *homogène* en $\sin x$ et $\cos x$. Par conséquent, si l'on pose $\operatorname{tg} x = t$, on a

$$8(1 - t^2 - 2t)t + (1 - t)(9 - 16t - 9t^2) = 0,$$

ou

$$t^3 - 9t^2 - 17t + 9 = 0;$$

et le problème peut être regardé comme résolu (*). (E. C.)

Question 591.

Théorème. *Soit* O *le point de rencontre des diagonales d'un quadrilatère,* M *et* N *les points de rencontre des côtés opposés. Les droites* OM, ON *rencontrent les côtés du quadrilatère en quatre points, sommets d'un nouveau quadrilatère, dont les côtés opposés concourent vers les points où la droite* MN *rencontre les diagonales du premier quadrilatère.* (E. Cesaro).

Cette proposition est presque évidente. Il suffit d'observer que tout quadrilatère peut être regardé comme la perspective d'un parallélogramme (*). (L. Lemoine.)

(*) Cette solution, que je trouve dans mes *devoirs* d'élève, est un assez curieux exercice de calcul : la réduction

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\cos x + \sin x) - (\cos 2x + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = -2\sin x$$

est surtout remarquable. J'ignore qui est l'auteur de la question.

(*) Il est étonnant que cette remarque m'ait échappé : le théorème en question est l'un des plus simples de la *théorie des transversales.* (E. C.)