SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS DE $\cos mx$ ET DE $\sin mx$.

1. Le théorème de Moivre donne, comme l'on sait (*),

$$\cos mx = \cos^m x - C_{m,2}\cos^{m-2}x\sin^2 x + C_{m,4}\cos^{m-4}x\sin^4 x - \cdots; \quad (1)$$

m étant supposé *entier et positif.*

Si l'on remplace $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, le second membre peut être ordonné suivant les puissances décroissantes de $\cos x$, puissances dont les *exposants* sont *de même parité que* m. Ainsi, sous forme abrégée,

$$\cos mx = \sum_{p=0} A_{2p}\cos^{m-2p}x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

2. Cette formule (dans laquelle A_{2p} est encore inconnu) en donne plusieurs autres.

1° Si l'on change x en $\frac{\pi}{2} - x$, le terme général devient $A_{2p}\sin^{m-2p}x$. Quant au premier membre, il se transforme en

$$\cos mx, \quad \sin mx, \quad -\cos mx, \quad -\sin mx,$$

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*, p. 180.

selon que

$$m = 4\mu,\quad m = 4\mu + 1,\quad m = 4\mu + 2,\quad m = 4\mu + 3.$$

Par conséquent :

$$\cos mx = \sum_{p=0} A_{2p} \sin^{m-2p} x, \qquad (m = 4\mu) \quad . \quad . \quad (B)$$

$$-\cos mx = \sum_{p=0} A_{2p} \sin^{m-2p} x, \qquad (m = 4\mu + 2) \quad . \quad (C)$$

$$\sin mx = \sum_{p=0} A_{2p} \sin^{m-2p} x, \qquad (m = 4\mu + 1) \quad . \quad (D)$$

$$-\sin mx = \sum_{p=0} A_{2p} \sin^{m-2p} x. \qquad (m = 4\mu + 3)\,(^*) \quad (E)$$

2° Si l'on prend les dérivées des deux membres, on trouve :

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = +\sum_{p=0} \frac{m-2p}{m} A_{2p} \sin^{m-2p-1} x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A')$$

$$\frac{\sin mx}{\cos x} = -\sum_{p=0} \frac{m-2p}{m} A_{2p} \sin^{m-2p-1} x, \qquad (m = 4\mu) \quad . \quad (B')$$

$$\frac{\sin mx}{\cos x} = +\sum_{p=0} \frac{m-2p}{m} A_{2p} \sin^{m-2p-1} x, \qquad (m = 4\mu+2) \quad (C')$$

$$\frac{\cos mx}{\cos x} = +\sum_{p=0} \frac{m-2p}{m} A_{2p} \sin^{m-2p-1} x, \qquad (m = 4\mu+1) \quad (D')$$

$$\frac{\cos mx}{\cos x} = -\sum_{p=0} \frac{m-2p}{m} A_{2p} \sin^{m-2p-1} x. \qquad (m = 4\mu+3) \quad (E')$$

3. D'après la formule (1),

$$A_0 = 1 + C_{m,2} + C_{m,4} + C_{m,6} + \cdots$$

(*) Les formules (A), (B), (C), (D), (E) sont dues, les unes à Viète, les autres à Jacques Bernoulli. Lagrange les a démontrées dans les *Leçons sur le calcul des fonctions* (Journal de l'École polytechnique, 12e Cahier). La démonstration de Cauchy, préférable à celle de Lagrange, est encore trop compliquée (voir la *Trigonométrie* de M. Serret).

Le second membre est la *somme des termes de rang impair*, dans le développement de $(1+1)^m$. Ainsi (*)

$$A_0 = 2^{m-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

4. Afin de déterminer les valeurs des coefficients $A_2, A_4, \ldots A_{2p}$, prenons, deux fois de suite, les dérivées des deux membres (**), dans l'égalité

$$\cos mx = \sum_{p=0} A_{2p} \cos^{m-2p} x; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (A)$$

savoir :

$$m \sin mx = \sin x \sum (m-2p) A_{2p} \cos^{m-2p-1} x,$$

$$m^2 \cos mx = \sum (m-2p) A_{2p} \left[\cos^{m-2p} x - (m-2p-1)\cos^{m-2p-2} x (1-\cos^2 x)\right],$$

ou

$$m^2 \cos mx = \sum (m-2p) A_{2p} \left[(m-2p)\cos^{m-2p} x - (m-2p-1)\cos^{m-2p-2} x\right].$$

Dans le second membre, le coefficient de $\cos^{m-2p} x$ se compose de $(m-2p)^2 A_{2p}$, *diminué* de $(m-2p+2)(m-2p+1)A_{2p-2}$ (***). Dans le premier membre, ce coefficient est $m^2 A_{2p}$.

On a donc, entre A_{2p} et A_{2p-2}, la relation

$$m^2 A_{2p} = (m-2p)^2 A_{2p} - (m-2p+2)(m-2p+1) A_{2p-2};$$

(*) *Cours d'Analyse*, p. 54.

(**) Cette méthode, beaucoup plus simple que toutes celles que l'on connaissait, est due à M. Ronkar, jeune ingénieur des Mines, et l'un de mes meilleurs élèves.

(***) En effet, l'ensemble des termes *positifs* est

$$m^2 A_0 \cos^m x + (m-2)^2 A_2 \cos^{m-2} x + (m-4)^2 A_4 \cos^{m-4} x + \cdots,$$

et l'ensemble des termes *négatifs* :

$$-m(m-1)A_0 \cos^{m-2} x - (m-1)(m-3)A_2 \cos^{m-4} x - \cdots$$

Cette remarque est faite pour ceux de nos jeunes lecteurs qui ne seraient pas familiarisés avec la notation Σ.

ou, plus simplement,

$$A_{2p} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{(m-2p+2)(m-2p+1)}{p(m-p)} A_{2p-2}.$$

La valeur initiale étant, comme on l'a vu, $A_0 = 2^{m-1}$, on trouve, successivement :

$$A_2 = -\,2^{m-3} \frac{m}{m-1} C_{m-1,1},$$

$$A_4 = +\,2^{m-5} \frac{m}{m-2} C_{m-2,2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et, en général,

$$A_{2p} = (-1)^p 2^{m-2p-1} \frac{m}{m-p} C_{m-p,p}. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

5. Application. La dernière formule donne :

Pour $m = 4$: $A_0 = 8$, $A_2 = -8$, $A_4 = 1$;

» $m = 5$: $A_0 = 16$, $A_2 = -20$, $A_4 = 5$;

» $m = 6$: $A_0 = 32$, $A_2 = -48$, $A_4 = 18$, $A_6 = -1$;

» $m = 7$: $A_0 = 64$, $A_2 = -112$, $A_4 = 56$, $A_6 = -7$.

Substituant dans les relations (A), (B), (C), (D), (E), on trouve :

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1,$$

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x,$$

$$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1,$$

$$\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x,$$

$$\cos 4x = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1,$$

$$\cos 6x = -32\sin^6 x + 48\sin^4 x - 18\sin^2 x + 1,$$

$$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x,$$

$$\sin 7x = -64\sin^7 x + 112\sin^5 x - 56\sin^3 x + 7\sin x;$$

puis, en prenant les dérivées (*) :

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} = 8\cos^3 x - 4\cos x,$$

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = 16\cos^4 x - 17\cos^2 x + 1,$$

$$\frac{\sin 6x}{\sin x} = 32\cos^5 x - 32\cos^3 x + 6\cos x,$$

$$\frac{\sin 7x}{\sin x} = 64\cos^6 x - 80\cos^4 x + 24\cos^2 x - 1,$$

$$\frac{\sin 4x}{\cos x} = -8\sin^3 x + 4\sin x,$$

$$\frac{\sin 6x}{\cos x} = 32\sin^5 x - 32\sin^3 x + 6\sin x,$$

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} = 16\sin^4 x - 12\sin^2 x + 1,$$

$$\frac{\cos 7x}{\cos x} = -64\sin^6 x + 80\sin^4 x - 24\sin^2 x + 1.$$

6. Équations réciproques. Si, dans la formule connue (**)

$$Z_m = \frac{1}{2^{m-1}}\left[z^m + C_{m,2}z^{m-2}(z^2-4) + C_{m,4}z^{m-4}(z^2-4)^2 + \cdots\right],$$

on fait $z = 2\cos x$, le second membre devient

$$2\left[\cos^m x - C_{m,2}\cos^{m-2}x\sin^2 x + C_{m,4}\cos^{m-4}x\sin^4 x - \cdots\right] = 2\cos mx.$$

Ainsi $Z_m = 2\cos mx$. Par conséquent, le développement de la fonction Z_m, ordonné suivant les puissances décroissantes de z,

---

(*) Ce calcul est plus simple que l'emploi des formules (A′), (B′), ...
(**) *Cours d'Analyse*, p. 286.

est, en vertu de la formule (A) :

$$Z_m = \sum_{p=0} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2p-1} A_{2p} z^{m-2p};$$

ou, plus simplement,

$$Z_m = \sum_{p=0} (-1)^p \frac{m}{m-p} C_{m-p,p}\, z^{m-2p}. \quad . \quad . \quad . \quad \text{(F)}$$

Telle est l'expression du terme général de la *suite récurrente* définie par la relation

$$Z_m = Z_{m-1} z - Z_{m-2},$$

et dans laquelle

$$Z_0 = 2, \quad Z_1 = z.$$

(E. CATALAN.)

P.-S. — M. Le Paige m'a fait observer que la méthode trouvée par M. RONKAR l'a été, antérieurement, par M. YVON VILLARCEAU (*Comptes rendus*, tome LXXXII).