SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN CUBE EN QUATRE CUBES.

M. Realis, l'un de nos plus zélés Correspondants, m'a demandé comment l'on peut parvenir à l'identité

$$27x^{12}(x^3-2)^3(x^6-x^3+1)^3+27x^9(2-x)^3(x^9+1)^3+(2x^3-1)^3(2x^9-6x^6-1)^3$$
$$+(5x^9-9x^6+3x^3-1)^3(x^3+1)^3=162(x-1)^2x^9(x^9+1)^3\ (^*). \quad \text{(A)}$$

Voici la réponse à cette question; et, en même temps, une *vérification* de l'exemple donné antérieurement (**).

I. Au moyen de l'*identité d'Euler :*

$$a^3-b^3=\frac{a^3(a^3-2b^3)^3}{(a^3+b^3)^3}+\frac{b^3(2a^3-b^3)^3}{(a^3+b^3)^3}, \quad \dots \quad (1)$$

l'identité de Lebesgue :

$$6(c-1)^2=c^3+(2-c)^3-1-1\ (^{***}) \quad \dots \quad (2)$$

devient

$$6(c-1)^2=c^3\left(\frac{c^3-2}{c^3+1}\right)^3+\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^3+(2-c)^3-1; \quad . \quad (3)$$

à cause de

$$c^3-1=c^3\left(\frac{c^3-2}{c^3+1}\right)^3+\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^3.$$

II. Si l'on suppose c compris entre $\sqrt[3]{2}$ et 2, les trois premiers termes du second membre, dans l'identité (3), sont positifs. Afin de remplacer, par une somme de deux *cubes positifs*, le binôme $\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^3-1$, prenons

$$a=\frac{2c^3-1}{c^3+1}, \quad b=1.$$

(*) *N. C. M.*, t. IV, pp. 352 et 371.

(**) T. IV, p. 372.

(***) *Exercices d'Analyse numérique*, p. 148.

Alors

$$\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^3-1$$

$$=\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^3\left[\frac{(2c^3-1)^3-2(c^3+1)^3}{(2c^3-1)^3+(c^3+1)^3}\right]^3+\left[\frac{2(2c^3-1)^3-(c^3+1)^3}{(2c^3-1)^3+(c^3+1)^3}\right]^3;$$

ou, après quelques réductions,

$$\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^3-1=\left[\frac{2c^3-1}{c^3+1}\,\frac{2c^9-6c^6-1}{3c^3(c^6-c^3+1)}\right]^3+\left[\frac{5c^9-9c^6+3c^3-1}{3c^3(c^6-c^3+1)}\right]^3. \quad (4)$$

Par conséquent, l'identité (3) est transformée en

$$6(c-1)^2=c^3\left(\frac{c^3-2}{c^3+1}\right)^3+(2-c)^3+\left[\frac{2c^3-1}{c^3+1}\,\frac{2c^9-6c^6-1}{3c^3(c^6-c^3+1)}\right]^3$$
$$+\left[\frac{5c^9-9c^6+3c^3-1}{3c^3(c^6-c^3+1)}\right]^3 \dots\dots \quad (5)$$

Chassant les dénominateurs, et remplaçant c par x, on trouve l'identité (A). Dans celle-ci, *tous les cubes sont positifs, dès que* x *est compris entre* $\sqrt[5]{3,1}$ *et* 2.

III. Soit, comme dans la Note précédente (**), $x=\frac{7}{4}$. On trouve

$$N^3=A^3+B^3+C^3+D^3,$$

en supposant :

$$N=18.343.40\,615\,751,\quad A=3.215.2\,401.99\,793\ (^{***}),$$
$$B=3.343.40\,615\,751,\quad C=8.311.35\,267\,854,$$
$$D=4.407.137\,954\,851;$$

(*) Il suffit, pour établir cette proposition, de discuter les équations

$$2x^3-6x^2-1=0,\quad 5x^3-9x^2+3x-1=0.$$

(**) *N. C. M.*, t. IV, p. 372.

(***) Au lieu de 99 793, on lit, à la page indiquée, 98 513. Cette erreur est, probablement, due à une distraction : elle n'existe pas sur la *minute* du calcul.

ou

$$N = 250\ 761\ 646\ 674, \quad A = 154\ 543\ 930\ 485,$$
$$B = \ \ 41\ 793\ 607\ 779, \quad C = \ \ 87\ 746\ 420\ 752,$$
$$D = 224\ 590\ 497\ 428.$$

Vérification.

$$N^3 = 15\ 768\ 244\ 272\ 452\ 554\ 919\ 319\ 605\ 753\ 070\ 024.$$

$$A^3 = \ \ 3\ 691\ 100\ 414\ 566\ 356\ 611\ 789\ 117\ 416\ 834\ 125,$$
$$B^3 = \qquad\quad 73\ 001\ 130\ 890\ 984\ 050\ 552\ 405\ 582\ 190\ 139,$$
$$C^3 = \quad\ \ 675\ 597\ 806\ 447\ 545\ 172\ 824\ 653\ 312\ 299\ 008,$$
$$D^3 = 11\ 328\ 544\ 920\ 547\ 669\ 084\ 153\ 429\ 441\ 746\ 752.$$

Somme : $15\ 768\ 244\ 272\ 452\ 554\ 919\ 319\ 605\ 753\ 070\ 024.$

IV. L'identité (4), si l'on y fait $c^3 = y$, devient

$$27y^3(y^2 - y + 1)^3(2y - 1)^3 = 27y^3(y^3+1)^3 + \left[(2y-1)(2y^3 - 6y^2 - 1)\right]^3$$
$$+ \left[(5y^3 - 9y^2 + 3y - 1)(y + 1)\right]^3; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

donc, pour avoir des solutions de

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = U^3,$$

il suffit de prendre :

$$X = 3y(y^3 + 1), \quad Y = (2y - 1)(2y^3 - 6y^2 - 1),$$
$$Z = (5y^3 - 9y^2 + 3y - 1)(y + 1), \quad U = 3y(y^2 - y + 1)(2y - 1).$$

On trouve ainsi :

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3\ (*),$$
$$273^3 + 40^3 + 303^3 = 364^3,$$
$$30\ 810^3 + 2\ 941^3 + 33\ 059^3 = 40\ 290^3;$$

etc.

E. Catalan.

(*) Cette solution résulte aussi de l'identité d'Euler, en y faisant $a = 2b$.