

Article

Sur la décomposition d'un cube en quatre cubes.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance
mathématique - 5 | Sommaire. Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et
sur les surfa...

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN CUBE EN QUATRE CUBES.

M. Realis, l'un de nos plus zélés Correspondants, m'a demandé comment l'on peut parvenir à l'identité

$$27x^{12}(x^3-2)^3(x^6-x^3+1)^3+27x^9(2-x)^3(x^9+1)^3+(2x^5-1)^3(2x^9-6x^6-1)^3 \\ + (5x^9-9x^6+3x^3-1)^3(x^3+1)^3 = 162(x-1)^2x^9(x^9+1)^3 (*) \quad (A)$$

Voici la réponse à cette question; et, en même temps, une vérification de l'exemple donné antérieurement (**).

I. Au moyen de l'identité d'Euler :

$$a^3 - b^3 = \frac{a^3(a^3 - 2b^3)^5}{(a^3 + b^3)^5} + \frac{b^3(2a^3 - b^3)^5}{(a^3 + b^3)^5}, \dots \quad (1)$$

l'identité de Lebesgue :

$$6(c-1)^2 = c^3 + (2-c)^5 - 1 - 1 (***) \dots \quad (2)$$

devient

$$6(c-1)^2 = c^3 \left(\frac{c^3-2}{c^3+1} \right)^5 + \left(\frac{2c^3-1}{c^3+1} \right)^5 + (2-c)^3 - 1; \dots \quad (3)$$

à cause de

$$c^3 - 1 = c^3 \left(\frac{c^3-2}{c^3+1} \right)^3 + \left(\frac{2c^3-1}{c^3+1} \right)^3.$$

II. Si l'on suppose c compris entre $\sqrt[5]{2}$ et 2, les trois premiers termes du second membre, dans l'identité (3), sont positifs. Afin de remplacer, par une somme de deux cubes positifs, le binôme $\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1} \right)^3 - 1$, prenons

$$a = \frac{2c^3-1}{c^3+1}, \quad b = 1.$$

(*) N. C. M., t. IV, pp. 552 et 571.

(**) T. IV, p. 572.

(***) Exercices d'Analyse numérique, p. 148.

Alors

$$\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^5 - 1 = \left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^5 \left[\frac{(2c^3-1)^5 - 2(c^3+1)^5}{(2c^3-1)^5 + (c^3+1)^5} \right]^5 + \left[\frac{2(2c^3-1)^5 - (c^3+1)^5}{(2c^3-1)^5 + (c^3+1)^5} \right]^5;$$

ou, après quelques réductions,

$$\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^5 - 1 = \left[\frac{2c^3-1}{c^3+1} \frac{2c^9-6c^6-1}{3c^3(c^6-c^3+1)} \right]^5 + \left[\frac{5c^9-9c^6+5c^3-1}{3c^3(c^6-c^3+1)} \right]^5. \quad (4)$$

Par conséquent, l'identité (3) est transformée en

$$6(c-1)^2 = c^3 \left(\frac{c^3-2}{c^3+1} \right)^5 + (2-c)^5 + \left[\frac{2c^3-1}{c^3+1} \frac{2c^9-6c^6-1}{3c^3(c^6-c^3+1)} \right]^5 + \left[\frac{5c^9-9c^6+5c^3-1}{3c^3(c^6-c^3+1)} \right]^5. \quad (5)$$

Chassant les dénominateurs, et remplaçant c par x , on trouve l'identité (A). Dans celle-ci, *tous les cubes sont positifs, dès que x est compris entre $\sqrt[3]{3}$ et 2.*

III. Soit, comme dans la Note précédente (**), $x = \frac{7}{4}$. On trouve

$$N^5 = A^5 + B^5 + C^5 + D^5,$$

en supposant :

$$N = 18.345.40.615.751, \quad A = 3.215.2.401.99.793 (**),$$

$$B = 5.345.40.615.751, \quad C = 8.511.35.267.854,$$

$$D = 4.407.157.954.851;$$

(*) Il suffit, pour établir cette proposition, de discuter les équations

$$2x^5 - 6x^2 - 1 = 0, \quad 5x^5 - 9x^2 + 3x - 1 = 0.$$

(**) *N. C. M.*, t. IV, p. 572.

(***) Au lieu de 99 793, on lit, à la page indiquée, 98 515. Cette erreur est, probablement, due à une distraction : elle n'existe pas sur la *minute* du calcul.

ou

$$\begin{aligned}
N &= 230\ 761\ 646\ 674, & A &= 134\ 545\ 950\ 485, \\
B &= 41\ 795\ 607\ 779, & C &= 87\ 746\ 420\ 752, \\
D &= 224\ 390\ 497\ 428.
\end{aligned}$$

Vérification.

$$N^5 = 13\ 768\ 244\ 272\ 452\ 554\ 919\ 319\ 605\ 753\ 070\ 024.$$

$$A^5 = 5\ 691\ 100\ 414\ 566\ 556\ 611\ 789\ 117\ 416\ 834\ 125,$$

$$B^5 = 75\ 001\ 150\ 890\ 984\ 050\ 552\ 405\ 582\ 190\ 159,$$

$$C^5 = 675\ 597\ 806\ 447\ 545\ 172\ 824\ 653\ 312\ 299\ 008,$$

$$D^5 = 11\ 528\ 544\ 920\ 547\ 669\ 084\ 135\ 429\ 441\ 746\ 752.$$

$$\text{Somme : } 13\ 768\ 244\ 272\ 452\ 554\ 919\ 319\ 605\ 753\ 070\ 024.$$

IV. L'identité (4), si l'on y fait $c^5 = y$, devient

$$\begin{aligned}
27y^3(y^2 - y + 1)^5(2y - 1)^5 &= 27y^3(y^3 + 1)^5 + [(2y - 1)(2y^5 - 6y^3 - 1)]^5 \\
&+ [(5y^3 - 9y^2 + 5y - 1)(y + 1)]^5; \dots \dots \dots (6)
\end{aligned}$$

done, pour avoir des solutions de

$$X^5 + Y^5 + Z^5 = U^5,$$

il suffit de prendre :

$$X = 3y(y^3 + 1), \quad Y = (2y - 1)(2y^5 - 6y^3 - 1),$$

$$Z = (5y^3 - 9y^2 + 5y - 1)(y + 1), \quad U = 3y(y^2 - y + 1)(2y - 1).$$

On trouve ainsi :

$$3^5 + 4^5 + 5^5 = 6^5 (*),$$

$$27^5 + 40^5 + 50^5 = 564^5,$$

$$30\ 810^5 + 2\ 941^5 + 55\ 059^5 = 40\ 290^5;$$

etc.

E. CATALAN.

(*) Cette solution résulte aussi de l'identité d'Euler, en y faisant $a = 2b$.