Question 498.

Dans tout triangle, la somme des carrés des distances du centre du cercle inscrit, aux centres des cercles ex-inscrits, est égale à douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit, plus quatre fois le carré de la distance comprise entre les centres du cercle inscrit et du cercle CIRCONSCRIT (*). (CHADU.)

Nous avons reçu, de M. ÉMILE HAERENS, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées (Gand), une solution que l'on peut résumer comme il suit :

1° Soient I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, et I' le centre du cercle ex-inscrit, opposé au sommet A.

Les points B, C, I, I' *appartiennent à une même circonférence, dont* II' *est un diamètre, et dont le centre* M' *est situé sur la circonférence circonscrite* (**).

2° Soient R le rayon du cercle circonscrit, et m' la projection de M sur BC. On a

$$\overline{M'C}^2 = \frac{1}{4}\overline{II'}^2 = 2R.M'm'.$$

Mais, M étant le milieu de II',

$$M'm' = \frac{1}{2}(\alpha - r);$$

et, par conséquent,

$$\overline{II'}^2 = 4R(\alpha - r)\ (^{***});$$

(*) Et non *ex-inscrit*, comme on l'a imprimé à la page 256. (E. H.)

(**) Propriété connue. Voir, par exemple, une Note de M. Van Aubel (*N. C.*, t. II, p. 315).

(***) Ainsi, *dans tout triangle, la distance des centres du cercle inscrit et*

r et α désignant les rayons du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit.

3° De l'égalité précédente, on conclut

$$\overline{\mathrm{II}'}^2 + \overline{\mathrm{II}''}^2 + \overline{\mathrm{II}'''}^2 = 4\mathrm{R}(\alpha + \beta + \gamma) - 12\mathrm{R}r\,; \quad . \quad . \quad (1)$$

ou, à cause de

$$\alpha + \beta + \gamma = r + 4\mathrm{R}\ (^*):$$

$$\overline{\mathrm{II}'}^2 + \overline{\mathrm{II}''}^2 + \overline{\mathrm{II}'''}^2 = 8\mathrm{R}(2\mathrm{R} - r) = 12\mathrm{R}^2 + 4\mathrm{R}(\mathrm{R} - 2r). \qquad (2)$$

4° Le théorème d'Euler, dont il vient d'être question, consiste en l'égalité

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = \mathrm{R}(\mathrm{R} - 2r)\ (^{**}).$$

Par conséquent, la relation (2) se réduit à

$$\overline{\mathrm{II}'}^2 + \overline{\mathrm{II}''}^2 + \overline{\mathrm{II}'''}^2 = 12\mathrm{R}^2 + 4\overline{\mathrm{OI}}^2.$$

(E. C.)

REMARQUES. — I. La combinaison du théorème d'Euler et du théorème de M. Haerens conduit, assez simplement, à cette autre propriété :

Dans tout triangle, les points k', k'', k''', *symétriques des centres des cercles ex-inscrits, relativement au centre du cercle circonscrit, appartiennent à une circonférence concentrique au cercle inscrit, et dont le rayon est double de celui du cercle circonscrit.*

---

d'un cercle ex-inscrit égale deux fois la moyenne proportionnelle entre la différence des rayons des cercles et le rayon du cercle circonscrit.

Cette propriété remarquable, que l'on emploie dans la démonstration du *Théorème d'Euler* (voir *Théorèmes et Problèmes*, 6e édition, p. 143, équation (1)), a une grande analogie avec celle-ci. Elle n'avait peut-être pas encore été formulée. Provisoirement, nous l'appellerons *Théorème de M. Haerens.*

(*) *Théorèmes et Problèmes*, p. 47.

(**) *Idem*, p. 143.

II. La droite $k''k'''$ est perpendiculaire à II′, en son milieu M′. De plus, elle passe au point A′, diamétralement opposé au sommet A, dans la circonférence circonscrite. De même, bien entendu, pour $k''k'$, $k'k'''$, relativement à II‴, II″.

III. *Le point* G, *symétrique de* I, *relativement à* O, *est le centre de la circonférence circonscrite au triangle* I′I″I‴; etc.

(E. C.)