Question 336.

Dans le développement de $(1 \pm z)^{-\frac{q}{p}}$, p *étant premier, tous les coefficients sont réductibles à la forme* $\frac{N}{p^k}$. (E. C.)

(*) Pour ne pas compliquer la figure, on a supposé la lemniscate intérieure à l'ellipse : en réalité, les deux lignes ont six points communs (voir *N. C. M.*, t. IV, p. 155).

I. LEMME. *Soit* b *un nombre premier, non diviseur de* a. *La fraction*

$$f=\frac{a(a+b)(a+2b)\ldots(a+\overline{n-1}b)}{1.2.3\ldots n}$$

est réductible à $\frac{N}{b^k}$.

Soit p un diviseur premier du dénominateur, différent de b. Prenons, dans le numérateur, les p facteurs consécutifs :

$$a,\quad a+b,\quad a+2b,\ \ldots\ a+\overline{p-1}b.$$

Parmi ces nombres, il y en a un, et un seul, divisible par p (*). Soit pa' ce multiple de p. Dans le numérateur, les seuls multiples de p sont :

$$pa',\quad pa'+pb,\quad pa'+2pb,\ \ldots\ pa'+(n'-1)pb;$$

n' étant le quotient entier de n par p.

Dans le dénominateur, les seuls multiples de p sont

$$p,\quad 2p,\quad 3p,\ \ldots\ n'p.$$

Supprimant, aux deux termes, $p^{n'}$, nous avons à considérer la fraction *auxiliaire :*

$$f'=\frac{a'(a'+b)(a'+2b)\ldots(a'+\overline{n'-1}b)}{1.2.3\ldots n'},$$

sur laquelle on peut répéter les mêmes raisonnements. Celle-ci conduit à une fraction

$$f''=\frac{a''(a''+b)\ldots(a''+\overline{n''-1}b)}{1.2\ldots n''};$$

n'' étant le quotient de n' par p. Et ainsi de suite. De cette ma-

(*) Démonstration connue.

nière, on fait disparaître, du numérateur de f, tous les facteurs premiers entrant dans le dénominateur. Il n'y a exception que pour le nombre premier b. Le lemme est donc démontré.

II. Dans le développement de $(1 \pm z)^{-\frac{q}{p}}$, le coefficient de z^n est, en valeur absolue,

$$\frac{q(q+p)(q+2p)\ldots(q+\overline{n-1}p)}{p\,.\,2p\,.\,3p\ldots np} = \frac{q(q+p)(q+2p)\ldots(q+\overline{n-1}p)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\cdot\frac{1}{p^n};$$

donc, en vertu du lemme, il est réductible à la forme

$$\frac{\mathrm{N}}{p^k}\cdot\frac{1}{p^n}.$$

III. Le facteur p^k est la plus grande puissance de p qui divise le produit $1\,.\,2\,.\,3\ldots n$. D'après la démonstration précédente (ou par une propriété connue),

$$k = \left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{n}{p^2}\right) + \left(\frac{n}{p^3}\right) + \cdots;$$

le symbole $\left(\frac{n}{a}\right)$ représentant le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{a}$.

Soient, par exemple : $q=10, p=7, n=15$. Le coefficient de z^{15} est

$$f = \frac{10\,.\,17\,.\,24\,.\,31\,.\,38\,.\,45\,.\,52\,.\,59\,.\,66\,.\,73\,.\,80\,.\,87\,.\,94\,.\,101\,.\,108}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9\,.\,10\,.\,11\,.\,12\,.\,13\,.\,14\,.\,15}\cdot\frac{1}{7^{15}}.$$

La dernière formule donne $k = \left(\frac{15}{7}\right) = 2$. En effet,

$$f = \frac{17\,.\,12\,.\,31\,.\,38\,.\,59\,.\,73\,.\,87\,.\,94\,.\,101}{7^{2+15}}.$$