Question 233.

Trouver la loi de formation des nombres à la fois triangulaires et carrés. (PHILIPPE BRETON.)

I. L'équation du problème :

$$x^2 = \frac{1}{2} y(y+1),$$

se transforme, immédiatement, en

$$(2y+1)^2 - 2(2x)^2 = 1 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Si l'on développe $\sqrt{2}$ en fraction continue, on trouve les réduites :

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{99}{70}, \quad \frac{239}{169}, \quad \frac{577}{408}, \ldots$$

Par conséquent :

$$2x = 2, \quad 12, \quad 70, \quad 408, \ldots,$$

$$2y+1 = 3, \quad 17, \quad 99, \quad 577, \ldots;$$

ou

$$x = 1, \quad 6, \quad 35, \quad 204, \ldots$$

$$y = 1, \quad 8, \quad 49, \quad 288, \ldots$$

II. Les valeurs générales de x et de y sont données par les formules connues :

$$x=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n}-(1-\sqrt{2})^{2n}\right],$$

$$2y+1=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{2n}+(1-\sqrt{2})^{2n}\right];$$

ou par celles-ci, qui s'en déduisent :

$$x=n+C_{2n,3}+2C_{2n,5}+2^2C_{2n,7}+\cdots, \quad \ldots \quad (2)$$

$$y=C_{2n,2}+2C_{2n,4}+2^2C_{2n,6}+\cdots. \quad \ldots \quad (3)$$

D'ailleurs,

$$x^2=\frac{1}{32}\left[(1+\sqrt{2})^{4n}+(1-\sqrt{2})^{4n}-2\right];$$

c'est-à-dire :

$$x^2=\frac{1}{8}\left[C_{4n,2}+2C_{4n,4}+2^2C_{4n,6}+\cdots\right] \quad \ldots \quad (4)$$

Ainsi, les nombres demandés sont donnés par la formule

$$N=\frac{1}{8}\left[C_{4n,2}+2C_{4n,4}+2^2C_{4n,6}+\cdots\right]: \quad \ldots \quad (7)$$

ils sont *entiers, carrés et triangulaires* (*).

III. D'après la valeur de $2y+1$, on a

$$y=\frac{1}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n\right]^2.$$

Si n est *pair*, cette formule peut être écrite ainsi :

$$y=2\left[C_{n,1}+2C_{n,3}+2^2C_{n,5}+\cdots\right]^2; \quad \ldots \quad (8)$$

et, si n est *impair* :

$$y=\left[1+2C_{n,2}+2^2C_{n,4}+\cdots\right]^2. \quad \ldots \quad (9)$$

(*) Voir *N. C. M.*, t. III, p. 194, et t. IV, p. 167.

Dans le second cas, *y est un carré impair;* et, dans le premier, *y est le double d'un carré pair.*

IV. A propos des fractions continues, voici quelques propriétés presque évidentes :

1° *Les termes de deux réduites consécutives ne peuvent être tous impairs;*

2° *Si une réduite a ses termes impairs, chacune des deux réduites voisines a un terme pair* (Corollaire de 1°);

3° *Lorsque deux réduites consécutives ont, chacune, un terme pair, la même propriété subsiste pour toutes les réduites suivantes.*

(E. C.).