On trouve ainsi, dans la série de FIBONACCI :

$$u_r^2 - u_{2r}^2 + u_{3r}^2 - u_{4r}^2 + \cdots + (-1)^{nr} u_{nr}^2 = \frac{1}{5}\left[2n + 1 - (-1)^{nr}\frac{u_{(2n+1)r}}{U_r}\right],$$

$$u_r^2 + u_{3r}^2 + u_{5r}^2 + \cdots\cdots + u_{(2n+1)r}^2 = \frac{1}{5}\left[\frac{u_{4(n+1)r}}{u_{2r}} - (-1)^r(2n+2)\right];$$

$$v_r^2 - v_{2r}^2 + v_{3r}^2 - \cdots\cdots + (-1)^{nr} v_{nr}^2 = 2n - 1 + (-1)^{nr}\frac{u_{(2n+1)r}}{u^r},$$

$$v_r^2 + v_{3r}^2 + v_{5r}^2 + \cdots\cdots + v_{(2n+1)r}^2 = \frac{u_{4(n+1)r}}{u_{2r}} + (-1)^r(2n+2).$$

La formule plus simple

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1},$$

donne ainsi, pour le côté du décagone étoilé inscrit, cette expression

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2+1^2} + \frac{1}{1^2+1^2+2^2} - \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2} + \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2}$$
$$- \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2} + \cdots.$$

On a encore, dans la même série :

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2,$$

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1.$$

(*La suite prochainement.*)

SUR LE PROBLÈME DES PARTIS.

1. On sait que ce problème, proposé à Pascal par le chevalier de Méré (*), peut être énoncé ainsi :

A *et* B *jouent ensemble. A chaque coup, l'un des joueurs gagne*

(*) *OEuvres de Blaise Pascal,* édition Hachette (1858); t. II, p. 392. Comme *un point. Après un certain nombre de coups, il manque, au joueur* A, a *points pour gagner la partie; il en manque* b *au joueur* B. *Les probabilités de* A *et de* B, *pour faire un point, étant* α *et* β, *quelles sont leurs probabilités de gagner la partie?*

2. Parmi les diverses solutions du problème, je prends celle qui a été donnée par Poisson (*), après Moivre et Lagrange (**). Il en résulte, pour la probabilité que A gagnera :

$$p = \alpha^a\left[1 + \frac{a}{1}\beta + \frac{a(a+1)}{1.2}\beta^2 + \ldots + \frac{a(a+1)\cdots(a+b-2)}{1.2\cdots(b-1)}\beta^{b-1}\right]. \quad (1)$$

Pour le joueur B, cette probabilité est

$$q = \beta^b\left[1 + \frac{b}{1}\alpha + \frac{b(b+1)}{1.2}\alpha^2 + \cdots + \frac{b(b+1)\cdots(b+a-2)}{1.2\cdots(a-1)}\alpha^{a-1}\right]. \quad (2)$$

3. On a, en série convergente,

$$\alpha^{-a} = (1-\beta)^{-a} = 1 + \frac{a}{1}\beta + \frac{a(a+1)}{1.2}\beta^2 + \cdots;$$

donc, à cause de $1 = p + q$:

$$p + q = \alpha^a\left[1 + \frac{a}{1}\beta + \frac{a(a+1)}{1.2}\beta^2 + \cdots\right]; \quad . \quad . \quad (3)$$

puis, par soustraction,

$$q = \alpha^a[C_{a+b-1,\,b}\beta^b + C_{a+b,\,b+1}\beta^{b+1} + \cdots]. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

De même,

$$p = \beta^b[C_{a+b-1,\,a}\alpha^a + C_{a+b,\,a+1}\alpha^{a+1} + \cdots]. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ainsi, *les probabilités* p, q *sont développées en séries.*

---

le fait observer Lacroix, *parti* est un vieux mot français, qui signifie *répartition : faire, à quelqu'un, un mauvais parti.*

A l'endroit cité, Pascal s'énonce ainsi : « Vous avez trouvé les deux *partis* des dés et des *parties* . . . »

(*) *Recherches sur les probabilités des jugements*, p. 189.

(**) *OEuvres de Lagrange* (édition de M. Serret), tome IV, p. 217.

4. Avant de chercher l'interprétation de ces formules, reprenons l'égalité (3), mise sous la forme :

$$1 = \alpha^a + \frac{a}{1}\beta\alpha^a + \frac{a(a+1)}{1.2}\beta^2\alpha^a + \cdots \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Dans le second membre :

α^a est la probabilité que A fera a points en a coups;

$\frac{a}{1}\beta\alpha^a$ est la probabilité que A fera $a - 1$ points en a coups, et un point au coup dont le rang est $a + 1$;

$\frac{a(a+1)}{1.2}\beta^2\alpha^a$ est la probabilité que A fera $a - 1$ points en $a + 1$ coups, et un point au coup dont le rang est $a + 2$;

. . . . (*).

L'équation (3) exprime donc ce fait évident :

Il est certain que, si l'on prolonge suffisamment la partie, le joueur A *finira par gagner les* a *points qui lui manquent.*

5. Revenons maintenant à la formule (5), ainsi écrite :

$$p = C_{a+b-1,b-1}\alpha^a\beta^b + C_{a+b,b-1}\alpha^{a+1}\beta^b + C_{a+b+1,b-1}\alpha^{a+2}\beta^b + \cdots. \quad (7)$$

1° $C_{a+b-1,b-1}a^\alpha b^\beta = C_{a+b-1,b-1}\alpha^a\beta^{b-1} \times \beta$: c'est la *probabilité que le joueur* B, *ayant gagné* b — 1 *points en* a + b — 1 *coups, gagnera encore un point au coup dont le rang est* a + b;

2° $C_{a+b,b-1}\alpha^{a+1}\beta^b = C_{a+b,b-1}\alpha^{a+1}\beta^{b-1} \times \beta$: *probabilité que le joueur* B, *ayant gagné* b — 1 *points en* a + b *coups, gagnera encore un point au coup dont le rang est* a + b + 1; etc.

Donc, le second membre de la formule (7) représente *la probabilité que le joueur* B *gagnera* b *points, en un nombre de coups égal ou supérieur à* b + a. Si l'on se reporte à l'énoncé du problème, on voit que *cette probabilité est la même que celle du joueur* A, *de gagner* a *points en* a + b — 1 *coups.*

6. Soient $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Alors, comme le fait remarquer Laplace, on peut imaginer une urne renfermant une boule blanche et une boule noire; la première pour A, la seconde pour B : à chaque

(*) Ce raisonnement est celui de Poisson.

tirage, on remet, dans l'urne, la boule tirée. Cela posé, la comparaison des valeurs (1), (7) conduit à cette proposition qui ne me semble pas évidente *a priori* :

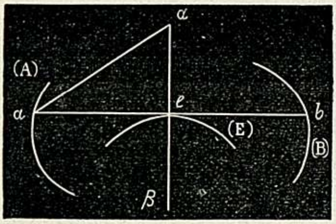
La probabilité que la boule blanche sortira a *fois, en* a + b — 1 *tirages, est égale à la probabilité que la boule noire sortira* b *fois, en un nombre de tirages égal ou supérieur à* b + *a*.

(E. Catalan.)

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ARCS D'ELLIPSE;

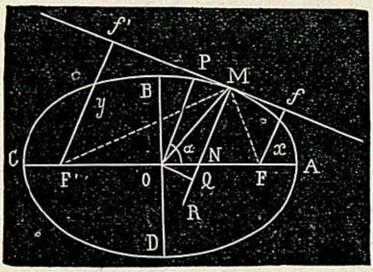
par M. E. Dubois, lieutenant du Génie (Grenoble).

I. — Lemme. *Une droite enveloppe une courbe* (E); *le point* a *décrit* (A); *le point* b *décrit* (B). l *désignant la longueur* ab, *on a*



$$\frac{dl}{d\omega} = \alpha\beta :$$

ω *est l'angle dont tourne* ab; α, β *sont les points où les normales en* a, b, *aux courbes* (A), (B), *rencontrent la normale à l'enveloppe* (*).



Soient l'ellipse ABCD et un point M; OP la perpendiculaire abaissée, du centre, sur la tangente en M; ON la perpendiculaire abaissée, du centre, sur la normale MN.

Soient, de plus :

$$OP = p, \quad OQ = q;$$

(*) Mannheim. *Note de Géométrie infinitésimale* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, tome II, 1859). (E. C.)