

Article

Sur le problème des partis.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance mathématique - 4 | Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques. Sur le p...

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

On trouve ainsi, dans la série de FIBONACCI :

$$u_r^2 - u_{2r}^2 + u_{3r}^2 - u_{4r}^2 + \dots + (-1)^{nr} u_{nr}^2 = \frac{1}{5} \left[2n + 1 - (-1)^{nr} \frac{u_{(2n+1)r}}{U_r} \right],$$

$$u_r^2 + u_{3r}^2 + u_{5r}^2 + \dots + u_{(2n+1)r}^2 = \frac{1}{5} \left[\frac{u_{(n+1)r}}{u_{2r}} - (-1)^r (2n + 2) \right],$$

$$v_r^2 - v_{2r}^2 + v_{3r}^2 - \dots + (-1)^{nr} v_{nr}^2 = 2n - 1 + (-1)^{nr} \frac{u_{(2n+1)r}}{u^r},$$

$$v_r^2 + v_{3r}^2 + v_{5r}^2 + \dots + v_{(2n+1)r}^2 = \frac{u_{(n+1)r}}{u_{2r}} + (-1)^r (2n + 2).$$

La formule plus simple

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1},$$

donne ainsi, pour le côté du décagone étoilé inscrit, cette expression

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2 + 1^2} + \frac{1}{1^2 + 1^2 + 2^2} - \frac{1}{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} + \frac{1}{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2} \\ - \frac{1}{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2} + \dots$$

On a encore, dans la même série :

$$u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_4 + \dots + u_{2n-1} u_{2n} = u_{2n}^2,$$

$$u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_4 + \dots + u_{2n} u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1.$$

(La suite prochainement.)

SUR LE PROBLÈME DES PARTIS.

1. On sait que ce problème, proposé à Pascal par le chevalier de Méré (*), peut être énoncé ainsi :

A et B jouent ensemble. A chaque coup, l'un des joueurs gagne

(*) *OEuvres de Blaise Pascal*, édition Hachette (1838); t. II, p. 592. Comme

un point. Après un certain nombre de coups, il manque, au joueur A, a points pour gagner la partie; il en manque b au joueur B. Les probabilités de A et de B, pour faire un point, étant α et β , quelles sont leurs probabilités de gagner la partie?

2. Parmi les diverses solutions du problème, je prends celle qui a été donnée par Poisson (*), après Moivre et Lagrange (**). Il en résulte, pour la probabilité que A gagnera :

$$p = \alpha^a \left[1 + \frac{a}{1} \beta + \frac{a(a+1)}{1.2} \beta^2 + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+b-2)}{1.2\dots(b-1)} \beta^{b-1} \right]. \quad (1)$$

Pour le joueur B, cette probabilité est

$$q = \beta^b \left[1 + \frac{b}{1} \alpha + \frac{b(b+1)}{1.2} \alpha^2 + \dots + \frac{b(b+1)\dots(b+a-2)}{1.2\dots(a-1)} \alpha^{a-1} \right]. \quad (2)$$

3. On a, en série convergente,

$$\alpha^{-a} = (1 - \beta)^{-a} = 1 + \frac{a}{1} \beta + \frac{a(a+1)}{1.2} \beta^2 + \dots;$$

donc, à cause de $1 = p + q$:

$$p + q = \alpha^a \left[1 + \frac{a}{1} \beta + \frac{a(a+1)}{1.2} \beta^2 + \dots \right]; \quad \dots \quad (3)$$

puis, par soustraction,

$$q = \alpha^a [C_{a+b-1, b} \beta^b + C_{a+b, b+1} \beta^{b+1} + \dots]. \quad \dots \quad (4)$$

De même,

$$p = \beta^b [C_{a+b-1, a} \alpha^a + C_{a+b, a+1} \alpha^{a+1} + \dots]. \quad \dots \quad (5)$$

Ainsi, les probabilités p, q sont développées en séries.

Il faut observer que *parti* est un vieux mot français, qui signifie *réparation* : faire, à quelqu'un, un mauvais parti.

A l'endroit cité, Pascal s'énonce ainsi : « Vous avez trouvé les deux parties des dés et des parties . . . »

(*) *Recherches sur les probabilités des jugements*, p. 189.

(**) *OEuvres de Lagrange* (édition de M. Serret), tome IV, p. 217.

4. Avant de chercher l'interprétation de ces formules, repreneons l'égalité (5), mise sous la forme :

$$1 = \alpha^a + \frac{a}{1} \beta \alpha^{a-1} + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} \beta^2 \alpha^{a-2} + \dots \quad (6)$$

Dans le second membre :

α^a est la probabilité que A fera a points en a coups ;

$\frac{a}{1} \beta \alpha^{a-1}$ est la probabilité que A fera $a - 1$ points en a coups, et un point au coup dont le rang est $a + 1$;

$\frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} \beta^2 \alpha^{a-2}$ est la probabilité que A fera $a - 2$ points en $a + 1$ coups, et un point au coup dont le rang est $a + 2$;

..... (*)

L'équation (5) exprime donc ce fait évident :

Il est certain que, si l'on prolonge suffisamment la partie, le joueur A finira par gagner les a points qui lui manquent.

5. Revenons maintenant à la formule (5), ainsi écrite :

$$p = C_{a+b-1, b-1} \alpha^a \beta^b + C_{a+b, b-1} \alpha^{a+1} \beta^b + C_{a+b+1, b-1} \alpha^{a+2} \beta^b + \dots \quad (7)$$

1° $C_{a+b-1, b-1} \alpha^a \beta^b = C_{a+b-1, b-1} \alpha^a \beta^{b-1} \times \beta$: c'est la probabilité que le joueur B, ayant gagné $b - 1$ points en $a + b - 1$ coups, gagnera encore un point au coup dont le rang est $a + b$;

2° $C_{a+b, b-1} \alpha^{a+1} \beta^b = C_{a+b, b-1} \alpha^{a+1} \beta^{b-1} \times \beta$: probabilité que le joueur B, ayant gagné $b - 1$ points en $a + b$ coups, gagnera encore un point au coup dont le rang est $a + b + 1$; etc.

Donc, le second membre de la formule (7) représente la probabilité que le joueur B gagnera b points, en un nombre de coups égal ou supérieur à $b + a$. Si l'on se reporte à l'énoncé du problème, on voit que cette probabilité est la même que celle du joueur A, de gagner a points en $a + b - 1$ coups.

6. Soient $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Alors, comme le fait remarquer Laplace, on peut imaginer une urne renfermant une boule blanche et une boule noire; la première pour A, la seconde pour B : à chaque

(*) Ce raisonnement est celui de Poisson.

tirage, on remet, dans l'urne, la boule tirée. Cela posé, la comparaison des valeurs (1), (7) conduit à cette proposition qui ne me semble pas évidente *a priori* :

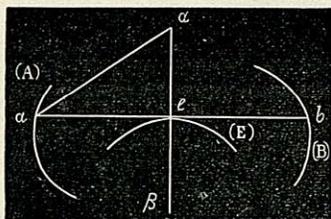
La probabilité que la boule blanche sortira a fois, en $a + b - 1$ tirages, est égale à la probabilité que la boule noire sortira b fois, en un nombre de tirages égal ou supérieur à $b + a$.

(E. CATALAN.)

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ARCS D'ELLIPSE;

par M. E. DUBOIS, lieutenant du Génie (Grenoble).

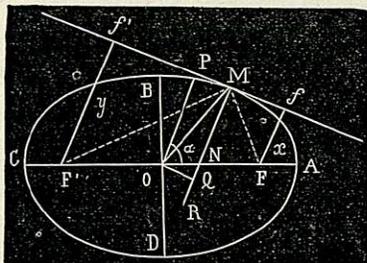
I. — LEMME. Une droite enveloppe une courbe (E); le point a décrit (A); le point b décrit (B). l désignant la longueur ab, on a



$$\frac{dl}{d\omega} = \alpha\beta :$$

ω est l'angle dont tourne ab; α, β sont les points où les normales en a, b, aux courbes (A), (B), rencontrent la normale à l'enveloppe (*).

()*



Soient l'ellipse ABCD et un point M; OP la perpendiculaire abaissée, du centre, sur la tangente en M; ON la perpendiculaire abaissée, du centre, sur la normale MN.

Soient, de plus :

$$OP = p, \quad OQ = q ;$$

(*) MANNHEIM. Note de Géométrie infinitésimale (*Annali di Matematica pura ed applicata*, tome II, 1859). (E. C.)