de l'équation considérée; cependant, parmi les expressions homogènes et composées avec trois variables, elles sont peut-être les plus simples.

Il existe aussi, pour la même équation, des formules propres à amener une nouvelle solution, au moyen d'une solution préalablement connue ; mais je crois qu'il serait inutile d'insister ici sur ce sujet.

(*La fin prochainement.*)

DÉCOMPOSITION D'UN CUBE EN QUATRE CUBES.

I. Après les solutions de ce problème, données par MM. Rebout et Realis (*), nous nous permettrons d'indiquer celles qui résultent de l'identité, assez compliquée :

$$\begin{aligned}&27x^{12}(x^3-2)^3(x^6-x^3+1)^3+27x^9(2-x)^3(x^9+1)^3\\&+(2x^3-1)(2x^9-6x^6-1)^3+(5x^9-9x^6+3x^3-1)^3(x^3+1)^3\\&=162(x-1)^2x^9(x^9+1)^3.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad\text{(A)}\end{aligned}$$

Si l'on y fait

$$x=1+6\left(\frac{a}{b}\right)^3,$$

la fraction $\frac{a}{b}$ étant comprise entre des limites convenables, on trouve, en simplifiant, *un cube, entier et positif, égal à la somme de quatre cubes entiers et positifs.*

II. La discussion de l'identité (A) conduit à celle-ci :

$$\begin{aligned}&(2x-1)^3(2x^3-6x^2-1)^3+(5x^3-9x^2+3x-1)^3(x+1)^3\\&+27x^3(x^2-x+1)^3(x+1)^3=27x^3(2x-1)^3(x^2-x+1)^3;\;.\quad\text{(B)}\end{aligned}$$

(*) Voir p. 350.

d'où l'on peut déduire une infinité de solutions, entières et positives, de l'équation

$$A^3 + B^3 + C^3 = N^3.$$

On trouve, par exemple,

$$217^3 + 935^3 + 780^3 = 1\ 092^3.$$

III. Au moyen de la substitution indiquée, l'identité (A) devient

$$\left.\begin{aligned}&(6a^2b)^3\left[(6a^3 + b^3)^3 + b^9\right]^3 + (b^3)^3\left[(6a^3 + b^3)^3 + b^9\right]^3\\ &\quad = (6a^3 + b^3)^3\left[(6a^3 + b^3)^3 - 2b^9\right]^3\\ &\quad + (b^3 - 6a^3)^3\left[(6a^3 + b^3)^3 + b^9\right]^3\\ &\quad + (b^3)^3\left[2(6a^3 + b^3)^3 - b^9\right]^3.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

Celle-ci donne *une infinité de nombres égaux, chacun, à la somme de deux cubes et à la somme de trois cubes;* ou, ce qui revient au même, une infinité de solutions, entières et positives, de l'équation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = S^3 + T^3 \ (^*).$$

On trouve ainsi

$$2\ 442^3 + 1\ 628^3 = 1\ 505^3 + 407^3 + 2\ 488^3 = 18\ 877\ 360\ 040,$$

$$5\ 714\ 703^3 + 235\ 297^3 = 2\ 825\ 600^3 + 117\ 650^3 + 5\ 529\ 550^3;$$

etc.

IV. Puisque l'occasion s'en présente, citons l'identité évidente et peu connue, croyons-nous :

$$p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad . \quad (D)$$

(*) Les dernières formules de M. Realis concourent au même résultat, d'une manière plus simple. Par exemple (p. 351),

$$7^3 + 12^3 + 17^3 = 5^3 + 19^3 = 6\ 984.$$

dans laquelle $2p = a + b + c$. Il en résulte que *si* a, b, c *sont des nombres entiers, dont la somme soit paire,* $a^2 + b^2 + c^2$ *est décomposable en quatre carrés.*

Par exemple,

$$5^2 + 7^2 + 6^2 = 9^2 + 4^2 + 2^2 + 3^2 \text{ (*)}.$$

V. Dans le tome I de la *Nouvelle Correspondance* (p. 133), nous avons mentionné cette formule de M. Neuberg :

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2 = {} & \left[a(a + b + c)\right]^2 + \left[b(a + b + c)\right]^2 \\ & + \left[c(a + b + c)\right]^2 + (bc + ca + ab)^2,\end{aligned}$$

qui permet de *trouver une infinité de carrés égaux, chacun, à une somme de quatre carrés.* En voici d'autres, au moyen desquelles *le carré d'une somme de trois ou de quatre carrés, est décomposé en trois ou quatre carrés :*

$$\begin{aligned}&\left[(b + c)^2 + (c + a)^2 + (a + b)^2\right]^2 = \left[a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2\right]^2 \\ &= 4\left[(a + b)(a + c)\right]^2 + 4\left[(b + c)(b + a)\right]^2 + 4\left[c^2 + (a + b)c - ab\right]^2 \\ &= (a^2 - b^2 + c^2 + bc + ca - ab)^2 + (-a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2 \\ &\quad + (a^2 + b^2 - c^2 + bc + ca + 3ab)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + 3bc + 3ca + ab)^2 \\ &= (b^2 - c^2 + a^2 + ca + ab - bc)^2 + (-b^2 + c^2 + a^2 + ca + ab + bc)^2 \\ &\quad + (b^2 + c^2 - a^2 + ca + ab + 3bc)^2 + (b^2 + c^2 + a^2 + 3ca + 3ab + bc)^2 \\ &= (c^2 - a^2 + b^2 + ab + bc - ca)^2 + (-c^2 + a^2 + b^2 + ab + bc + ca)^2 \\ &\quad + (c^2 + a^2 - b^2 + ab + bc + 3ca)^2 + (c^2 + a^2 + b^2 + 3ab + 3bc + ca)^2.\end{aligned}$$

(*La fin prochainement.*)

(E. CATALAN.)

(*) L'identité (D) peut servir à démontrer divers théorèmes de Géométrie.