

Article

Décomposition d'un cube en quatre cubes.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance  
mathématique - 4 | Notes élémentaires sur le problème de Pell. Sur l'addition  
des fonctions...

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:  
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

de l'équation considérée; cependant, parmi les expressions homogènes et composées avec trois variables, elles sont peut-être les plus simples.

Il existe aussi, pour la même équation, des formules propres à amener une nouvelle solution, au moyen d'une solution préalablement connue; mais je crois qu'il serait inutile d'insister ici sur ce sujet. (La fin prochainement.)

### DÉCOMPOSITION D'UN CUBE EN QUATRE CUBES.

I. Après les solutions de ce problème, données par MM. Rebut et Realis (\*), nous nous permettrons d'indiquer celles qui résultent de l'identité, assez compliquée :

$$\begin{aligned}
& 27x^{12}(x^5 - 2)^5(x^6 - x^5 + 1)^5 + 27x^9(2 - x)^5(x^9 + 1)^5 \\
& + (2x^5 - 1)(2x^9 - 6x^6 - 1)^5 + (5x^9 - 9x^6 + 3x^5 - 1)^5(x^5 + 1)^5 \\
& = 162(x - 1)^2x^9(x^9 + 1)^5. \dots \dots \dots (A)
\end{aligned}$$

Si l'on y fait

$$x = 1 + 6 \left(\frac{a}{b}\right),$$

la fraction  $\frac{a}{b}$  étant comprise entre des limites convenables, on trouve, en simplifiant, un cube, entier et positif, égal à la somme de quatre cubes entiers et positifs.

II. La discussion de l'identité (A) conduit à celle-ci :

$$\begin{aligned}
& (2x - 1)^5(2x^5 - 6x^2 - 1)^5 + (5x^5 - 9x^2 + 3x - 1)^5(x + 1)^5 \\
& + 27x^3(x^2 - x + 1)^5(x + 1)^5 = 27x^5(2x - 1)^5(x^2 - x + 1)^5; \dots (B)
\end{aligned}$$

(\*) Voir p. 530.

d'où l'on peut déduire une infinité de solutions, entières et positives, de l'équation

$$A^5 + B^5 + C^5 = N^5.$$

On trouve, par exemple ,

$$217^5 + 935^5 + 780^5 = 1\ 092^5.$$

III. Au moyen de la substitution indiquée, l'identité (A) devient

$$\left. \begin{aligned} & (6a^2b)^5 [(6a^5 + b^5)^5 + b^9]^5 + (b^3)^5 [(6a^5 + b^5)^5 + b^9]^5 \\ & = (6a^5 + b^5)^5 [(6a^5 + b^5)^5 - 2b^9]^5 \\ & + (b^5 - 6a^5)^5 [(6a^5 + b^5)^5 + b^9]^5 \\ & + (b^3)^5 [2(6a^5 + b^5)^5 - b^9]^5. \end{aligned} \right\} \dots (C)$$

Celle-ci donne une infinité de nombres égaux, chacun, à la somme de deux cubes et à la somme de trois cubes; ou, ce qui revient au même, une infinité de solutions, entières et positives, de l'équation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = S^3 + T^3 (*).$$

On trouve ainsi

$$2\ 442^3 + 1\ 628^3 = 1\ 505^3 + 407^3 + 2\ 488^3 = 18\ 877\ 560\ 040,$$

$$5\ 714\ 705^3 + 255\ 297^3 = 2\ 825\ 600^3 + 117\ 650^3 + 5\ 529\ 550^3;$$

etc.

IV. Puisque l'occasion s'en présente, citons l'identité évidente et peu connue, croyons-nous :

$$p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad (D)$$

(\*) Les dernières formules de M. Realis concourent au même résultat, d'une manière plus simple. Par exemple (p. 551),

$$7^5 + 12^5 + 17^5 = 5^5 + 19^5 = 6\ 984.$$

dans laquelle  $2p = a + b + c$ . Il en résulte que si  $a, b, c$  sont des nombres entiers, dont la somme soit paire,  $a^2 + b^2 + c^2$  est décomposable en quatre carrés.

Par exemple,

$$5^2 + 7^2 + 6^2 = 9^2 + 4^2 + 2^2 + 3^2 (*).$$

V. Dans le tome I de la *Nouvelle Correspondance* (p. 153), nous avons mentionné cette formule de M. Neuberg :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2 = [a(a + b + c)]^2 + [b(a + b + c)]^2 + [c(a + b + c)]^2 + (bc + ca + ab)^2,$$

qui permet de trouver une infinité de carrés égaux, chacun, à une somme de quatre carrés. En voici d'autres, au moyen desquelles le carré d'une somme de trois ou de quatre carrés, est décomposé en trois ou quatre carrés :

$$\begin{aligned} [(b + c)^2 + (c + a)^2 + (a + b)^2]^2 &= [a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2]^2 \\ &= 4[(a + b)(a + c)]^2 + 4[(b + c)(b + a)]^2 + 4[c^2 + (a + b)c - ab]^2 \\ &= (a^2 - b^2 + c^2 + bc + ca - ab)^2 + (-a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2 \\ &\quad + (a^2 + b^2 - c^2 + bc + ca + 3ab)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + 3bc + 3ca + ab)^2 \\ &= (b^2 - c^2 + a^2 + ca + ab - bc)^2 + (-b^2 + c^2 + a^2 + ca + ab + bc)^2 \\ &\quad + (b^2 + c^2 - a^2 + ca + ab + 3bc)^2 + (b^2 + c^2 + a^2 + 3ca + 3ab + bc)^2 \\ &= (c^2 - a^2 + b^2 + ab + bc - ca)^2 + (-c^2 + a^2 + b^2 + ab + bc + ca)^2 \\ &\quad + (c^2 + a^2 - b^2 + ab + bc + 3ca)^2 + (c^2 + a^2 + b^2 + 3ab + 3bc + ca)^2. \end{aligned}$$

(La fin prochainement.)

(E. CATALAN.)

(\*) L'identité (D) peut servir à démontrer divers théorèmes de Géométrie.