SUR UNE TRANSFORMATION DE SÉRIES NUMÉRIQUES;

par M. TCHÉBYCHEF (*).

---

1. Il y a déjà plus d'un quart de siècle, Alphonse de Polignac et moi, nous avons publié nos recherches sur la Répartition des nombres premiers. Ces recherches diffèrent, essentiellement, de ce qu'on a fait, avant nous, sur le même sujet. Nous avons donné des valeurs *limitatives* de fonctions dont on n'avait que des valeurs *asymptotiques*. La base de ces recherches est une *formule qui remplace la somme des logarithmes de tous les nombres entiers* (jusqu'à une certaine limite) *par des sommes relatives à des nombres premiers*. Voici cette formule :

$$\log 2 + \log 3 + \log 4 + \cdots + \log(a) = \psi(a) + \psi\left(\frac{a}{2}\right) + \psi\left(\frac{a}{3}\right) + \cdots \qquad \text{(A)}$$

Dans le second membre,

$$\psi\left(\frac{a}{n}\right) = \theta\left(\frac{a}{n}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{a}{n}}\right) + \theta\left(\sqrt[4]{\frac{a}{n}}\right) + \cdots, \quad . \qquad \text{(B)}$$

$\theta(k)$ désignant, en général, *la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas* k (**).

La formule (A) diffère essentiellement, nous venons de le dire, de celles que l'on connaissait autrefois. Parmi celles-ci, l'une des

---

(*) Communication faite au Congrès de Paris. 26 août 1878. — L'illustre Géomètre russe nous autorise à publier, dans la *Nouvelle Correspondance*, les remarquables formules dont il vient d'enrichir l'Analyse. (E. C.)

(**) Voir la Note I.

plus importantes est la relation

$$1+\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{3^\rho}+\frac{1}{4^\rho}+\cdots=\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^\rho}\,\frac{1}{1-(\frac{1}{3})^\rho}\cdot\frac{1}{1-(\frac{1}{5})^\rho}\cdots, \qquad (C)$$

dont le second membre ne contient que les nombres premiers (*).

2. En cherchant à rapprocher les formules (A) et (C), je suis parvenu à reconnaître qu'elles découlent d'une même égalité :

$$\left.\begin{aligned}&\log 2.f(2)+\log 3.f(3)+\log 4.f(4)+\log 5.f(5)+\cdots\\ =&\log 2.F(2)+\log 3.F(3)+\log 5.F(5)+\log 7.F(7)+\cdots,\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (D)$$

les fonctions $f(x)$, $F(x)$ ayant une relation convenable. Cette relation, très-simple, est (**)

$$F(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty} f(nx^m)\ (^{***}).\quad .\ .\ .\ .\ (E)$$

3. Soit $f(x)=\frac{1}{x^\rho}$, la variable x et l'exposant ρ étant supérieurs à l'unité. Nous aurons

$$f(nx^m)=\frac{1}{(nx^m)^\rho};$$

puis

$$F(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^\rho}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{x^{m\rho}}.$$

Comme

$$\sum_1^\infty\frac{1}{x^{m\rho}}=\frac{1}{x^\rho}+\frac{1}{x^{2\rho}}+\frac{1}{x^{3\rho}}+\cdots=\frac{1}{x^\rho-1},$$

la valeur de $F(x)$ se réduit à

$$\frac{1}{x^\rho-1}\sum_1^\infty\frac{1}{n^\rho};$$

(*) Voir la Note II.

(**) Voir la Note III.

(***) Les fonctions $f(x)$, $F(x)$ peuvent être continues ou discontinues : il suffit que les séries résultantes soient convergentes.

et l'égalité (D) devient,

$$\frac{\log 2}{2^\rho}+\frac{\log 3}{3^\rho}+\frac{\log 4}{4^\rho}+\frac{\log 5}{5^\rho}+\cdots$$
$$=\left[\frac{\log 2}{2^\rho-1}+\frac{\log 3}{3^\rho-1}+\frac{\log 5}{5^\rho-1}+\frac{\log 7}{7^\rho-1}+\cdots\right]\sum_1^\infty\frac{1}{n^\rho}.$$

Le premier membre est, au signe près, la dérivée de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\rho}$, par rapport à ρ. Ainsi

$$-\frac{\dfrac{d.\sum_1^\infty \frac{1}{n^\rho}}{d\rho}}{\sum_1^\infty \frac{1}{n^\rho}}=\frac{\log 2}{2^\rho-1}+\frac{\log 3}{3^\rho-1}+\frac{\log 5}{5^\rho-1}+\frac{\log 7}{7^\rho-1}+\cdots.$$

Intégrant, de ρ quelconque à ρ infini, on a donc

$$\log\sum_1^\infty\frac{1}{n^\rho}=-\log\left(1-\frac{1}{2^\rho}\right)-\log\left(1-\frac{1}{3^\rho}\right)-\log\left(1-\frac{1}{5^\rho}\right)-\cdots$$
$$=\log\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{3^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{5^\rho}\right)\cdots};$$

puis la formule (C).

4. Si l'on suppose

$$f(x)=1$$

pour $x \overline{\overline{<}}\, a$, et

$$f(x)=0$$

pour $x>a$ (*), nous trouvons que la somme

$$\log 2 f(2)+\log 3 f(3)+\log 4 f(4)+\cdots.$$

se réduit à la somme des logarithmes des nombres 2, 3, 4, ...

(*) Voir la Note IV.

E(a) (*); et alors notre formule (D) donne la décomposition de cette somme, en plusieurs sommes, composées des seuls nombres premiers, décomposition qui était la base des recherches faites, sur les nombres premiers, par A. de Polignac et moi.

5. En donnant d'autres valeurs à la formule $f(x)$, on obtient de nouvelles formules, qui peuvent avoir d'utiles applications. On trouve, par exemple, que *la somme*

$$e^{-3c} - e^{-5c} + e^{-7c} + e^{-11c} - e^{-13c} - e^{-17c} + \cdots$$

croît indéfiniment, quand c *tend vers zéro.*

Comme les termes de la série, pour $c = 0$, se réduisent à ± 1, selon que les facteurs correspondants ont la forme $4n + 3$ ou la forme $4n + 1$, on est conduit à cette conclusion : *Il y a une différence notable dans la répartition des nombres premiers, des deux formes* 4n + 3, 4n + 1 : *la première forme en contient beaucoup plus que la seconde.*

Notes du Rédacteur. — I. Les formules

$$\log 2 + \log 3 + \log 4 + \cdots + \log a = \psi(a) + \psi\left(\frac{a}{2}\right) + \psi\left(\frac{a}{3}\right) + \cdots, \quad (A)$$

$$\psi\left(\frac{a}{n}\right) = \theta\left(\frac{a}{n}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{a}{n}}\right) + \theta\left(\sqrt[4]{\frac{a}{n}}\right) + \cdots \quad (B)$$

ont été données par M. Tchébychef, dans un beau Mémoire publié en 1852 (*Journal de Liouville*, tome XVII, p. 369). On peut les démontrer de la manière suivante :

(*) La notation E(a) désigne, depuis Legendre, *le plus grand nombre entier compris dans* a. (E. C.)

1° D'après une formule bien connue, le premier membre de (A) égale

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{a}{2^2}\right)+\left(\frac{a}{2^3}\right)+\cdots\right]\log 2\\
+&\left[\left(\frac{a}{3}\right)+\left(\frac{a}{3^2}\right)+\left(\frac{a}{3^3}\right)+\cdots\right]\log 3\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&\left[\left(\frac{a}{p}\right)+\left(\frac{a}{p^2}\right)+\left(\frac{a}{p^3}\right)+\cdots\right]\log p\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

2, 3, 5, ... p, ... étant les nombres premiers qui ne surpassent point a (*). Ainsi, dans ce premier membre, le logarithme du nombre premier p est pris autant de fois que l'indique

$$\left(\frac{a}{p}\right)+\left(\frac{a}{p^2}\right)+\left(\frac{a}{p^3}\right)+\cdots.$$

2° Dans le second membre de (A), $\log p$ se trouve, *une seule fois*, dans *chaque terme de chacune* des suites :

$$\begin{aligned}
&\theta(a)+\theta\left(\sqrt{a}\right)+\theta\left(\sqrt[3]{a}\right)+\cdots,\\
&\theta\left(\frac{a}{2}\right)+\theta\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)+\theta\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right)+\cdots,\\
&\theta\left(\frac{a}{3}\right)+\theta\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)+\theta\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)+\cdots,\\
&\theta\left(\frac{a}{4}\right)+\theta\left(\sqrt{\frac{a}{4}}\right)+\theta\left(\sqrt[3]{\frac{a}{4}}\right)+\cdots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

chacun de ces termes étant égal ou supérieur à p.

(*) Nous rappelons que le symbole $\left(\frac{a}{p}\right)$ représente le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{a}{p}$.

3° *Le nombre de ces termes,* ou le coefficient de $\log p$, dans le second membre de (A), *égale la somme des nombres de termes* des suites :

$$\left.\begin{array}{l}
\theta(a)+\theta\left(\frac{a}{2}\right)+\theta\left(\frac{a}{3}\right)+\theta\left(\frac{a}{4}\right)+\cdots,\\
\theta\left(\sqrt{a}\right)+\theta\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)+\theta\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)+\theta\left(\sqrt{\frac{a}{4}}\right)+\cdots,\\
\theta\left(\sqrt[3]{a}\right)+\theta\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right)+\theta\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)+\theta\left(\sqrt[3]{\frac{a}{4}}\right)+\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}\cdot\quad(\mathrm{T})$$

4° Ces préliminaires posés, je dis que : *dans le tableau* (T), *le nombre des termes de la première ligne égale* $\left(\frac{a}{p}\right)$; *le nombre des termes de la deuxième ligne égale* $\left(\frac{a}{p^2}\right)$; etc. En effet, q étant le dernier diviseur de a, l'hypothèse ci-dessus donne :

$$\left(\frac{a}{1}\right)\geqq p,\quad \left(\frac{a}{2}\right)\geqq p,\quad \left(\frac{a}{3}\right)\geqq p,\ \cdots\ \left(\frac{a}{q}\right)\geqq p.$$

Ainsi, dans (T), le nombre de termes de la première ligne est q, c'est-à-dire $\left(\frac{a}{p}\right)$.

De même, dans la deuxième ligne, le dernier diviseur de a étant q', on a

$$\sqrt{a}\geqq p,\quad \sqrt{\frac{a}{2}}\geqq p,\ \ldots\ \sqrt{\frac{a}{q'}}\geqq p,$$

ou

$$a\geqq p^2,\quad \frac{a}{2}\geqq p^2,\ \ldots\ \frac{a}{q'}\geqq p^2;$$

donc le nombre des termes est

$$q'=\left(\frac{a}{p^2}\right);$$

etc. (*).

(*) Cette démonstration, rédigée pendant un voyage, ne diffère pas, au fond, de celle qui a été donnée par M. Tchébychef (*Journal de Liouville*, t. XVII, p. 369).

II. Cette relation, due à Euler (*), est presque évidente. En effet, d'après la règle qui sert à former tous les diviseurs d'un nombre donné, l'on a *identiquement* (**)

$$\frac{1}{1^\rho}+\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{3^\rho}+\frac{1}{4^\rho}+\cdots=\left(1+\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{2^{2\rho}}+\frac{1}{2^{3\rho}}+\cdots\right)$$
$$\times\left(1+\frac{1}{3^\rho}+\frac{1}{3^{2\rho}}+\frac{1}{3^{3\rho}}+\cdots\right)$$
$$\times\left(1+\frac{1}{5^\rho}+\frac{1}{5^{2\rho}}+\frac{1}{5^{3\rho}}+\cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Or, le premier facteur égale

$$\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^\rho};$$

le deuxième,

$$\frac{1}{1-(\frac{1}{3})^\rho};$$

etc.

III. Dans sa communication au Congrès de Paris, M. Tchébychef n'a pas démontré les égalités (D), (E). Voici comment nous avons essayé de réparer cette omission volontaire.

Le terme général de la série

$$\log 2 f(2)+\log 3 f(3)+\log 4 f(4)+\log 5 f(5)+\cdots,$$

peut être représenté par

$$\log(p^\alpha N) f(p^\alpha N),$$

p étant un nombre premier, et N un nombre entier, non divisible par p.

(*) *Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 221.

(**) L'exposant ρ peut être commensurable ou incommensurable : il est assujéti, seulement, à la condition de surpasser l'unité (*Traité élémentaire des séries*, p. 16).

Ce terme égale

$$(\alpha \log p + \log N) f(p^{\alpha} N).$$

Le coefficient de $\log p$ est donc

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \alpha f(p^{\alpha} N) &= f(pN) + 2 f(p^2 N) + 3 f(p^3 N) + 4 f(p^4 N) + \cdots \\ &= f(p.N) + f(p.Np) + f(p.Np^2) + f(p.Np^3) + \cdots \\ &\quad + f(p^2.N) + f(p^2.Np) + f(p^2.Np^2) + \cdots \\ &\quad + f(p^3.N) + f(p^3.Np) + \cdots \\ &\quad + f(p^4.N) + \cdots \\ &\quad + \cdots \text{(*)}.\end{aligned}$$

Mais, N étant premier avec p, la suite

$$N,\ Np,\ Np^2,\ Np^3,\ \ldots$$

contient tous les nombres entiers, *sans omission et sans répétition* (**). La série double, ci-dessus, peut donc être remplacée par

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} f(p^{\alpha} n);$$

et, en conséquence,

$$\log 2\, f(2) + \log 3\, f(3) + \log 4\, f(4) + \cdots = \sum \log p \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} f(p^{\alpha} n);$$

formule de M. Tchébychef.

(*) Suivant un théorème de Dirichlet, *quand les termes d'une série convergente sont positifs, on peut les grouper arbitrairement.*

(**) Soit, par exemple, $p = 3$:

N	représente les nombres	1,	2,	4,	5,	7,	8,	...
Np	— —	3,	6,	12,	15,	21,	24,	...
Np^2	— —	9,	18,	36,	45,	63,	72,	...
Np^3	— —	27,	54,	108,	135,	189,	216,	...
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

IV. On satisfait à ces deux conditions en prenant

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\frac{\varphi x}{a}\,d\varphi \text{ (*)}.$$

SUR LA TRANSFORMATION HARMONIQUE LINÉAIRE;

par M. PAUL MANSION.

(*Suite*, voir t. IV, p. 45.)

II

LA SEULE TRANSFORMATION LINÉAIRE RÉVERSIBLE EST LA TRANSFORMATION HARMONIQUE.

1. *Dans une transformation linéaire réversible, il y a au moins un point commun aux deux figures.* Les formules générales de transformation sont :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z}{x'}=\frac{a_2x+b_2y+c_2z}{y'}=\frac{a_3x+b_3y+c_3z}{z'}.$$

Pour les simplifier, prenons, pour l'une des droites de référence, celle qui réunit deux points correspondants M, M'. Par hypothèse, MM' aura pour correspondante M'M. Si MM' a pour équation $x=0$, les formules de transformation devront être vérifiées quand on fera, en même temps, $x=0$, $x'=0$. Donc $b_1=0$,

(*) Voir, par exemple, un célèbre Mémoire de Dirichlet (*Journal de Liouville*, t. IV, p. 165).