Question 106.

Vérifier la relation

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + \cdots = \frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5}$$

$$- \frac{x^7}{1-x^7} - \frac{x^{11}}{1-x^{11}} - \frac{x^{13}}{1-x^{13}} + \frac{x^{15}}{1-x^{15}} - \cdots$$

« Lemme. *Soit* N *un nombre entier. Soit* δ *un diviseur* impair *de* N, *composé d'un nombre* impair *de facteurs premiers, inégaux. Soit enfin* δ' *un diviseur* impair *de* N, *composé d'un nombre* pair *de facteurs premiers, inégaux. Cela posé, le nombre des diviseurs* δ, *égal au nombre des diviseurs* δ', *est* 2^{n-1}; n *représentant le nombre des facteurs premiers de* N, *impairs et inégaux.*

(*) *Notes d'Algèbre et d'Analyse* (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, tome XLII).

Soient a, b, c, d, e, ... ces facteurs premiers. Les valeurs de δ sont

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \cdots,\ abc,\ abd,\ acd,\ bcd,\ \cdots,\ abcde,\ \cdots;$$

les valeurs de δ' sont

$$1,\ ab,\ ac,\ bc,\ \cdots\ abcd,\ abce,\ bcde,\ \cdots.$$

Or, par la théorie des combinaisons, on sait que le nombre des termes contenus dans chacune de ces deux lignes est 2^{n-1}; donc, etc.

Considérons la série

$$\varphi(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} - \frac{x^7}{1-x^7} - \frac{x^{11}}{1-x^{11}} - \frac{x^{13}}{1-x^{13}} + \frac{x^{15}}{1-x^{15}} - \cdots, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

ou, pour abréger,

$$\varphi(x) = \frac{x}{1-x} - \sum \frac{x^a}{1-x^a} + \sum \frac{x^{ab}}{1-x^{ab}} - \sum \frac{x^{abc}}{1-x^{abc}} + \cdots, \quad (2)$$

a, b, c, d, ... étant des nombres *premiers*, *impairs* et *inégaux*.

Si chaque fraction est développée en série, la somme de toutes ces séries prendra la forme

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots;$$

ainsi

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty A_n x^n. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Cela posé, il y a deux cas à distinguer :

1° *Si* n *est une puissance de* 2, le terme $A_n x^n$ provient, uniquement, de $\frac{x}{1-x}$; donc $A_n = 1$.

2° *Si* n *n'est pas une puissance de* 2, cet exposant a la forme

$2^k a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$; A_n égale le nombre des diviseurs δ', moins le nombre des diviseurs δ; ou, d'après le Lemme, $A_n = 0$.

Conséquemment,

$$\varphi(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + \cdots \text{(*)} \text{ »}. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Remarque. Si, dans l'égalité (2), on change x en $-x$, le second membre devient

$$-\frac{x}{1+x} + \sum \frac{x^a}{1+x^a} - \sum \frac{x^{ab}}{1+x^{ab}} + \sum \frac{x^{abc}}{1+x^{abc}} - \cdots.$$

Et comme

$$\varphi(-x) = -x + x^2 + x^4 + x^8 + \cdots,$$

on trouve, par soustraction,

$$x = \frac{x}{1-x^2} - \sum \frac{x^a}{1-x^{2a}} + \sum \frac{x^{ab}}{1-x^{2ab}} - \sum \frac{x^{abc}}{1-x^{2abc}} + \cdots,$$

c'est-à-dire :

$$x = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^6} - \frac{x^5}{1-x^{10}} - \frac{x^7}{1-x^{14}} - \frac{x^{11}}{1-x^{22}}$$
$$- \frac{x^{13}}{1-x^{26}} + \frac{x^{15}}{1-x^{30}} - \frac{x^{17}}{1-x^{34}} - \frac{x^{19}}{1-x^{38}} + \frac{x^{21}}{1-x^{42}}$$
$$- \frac{x^{23}}{1-x^{46}} - \frac{x^{29}}{1-x^{58}} - \frac{x^{31}}{1-x^{62}} + \frac{x^{33}}{1-x^{66}} - \cdots.$$

(E. C.)

(*) *Notes d'Algèbre et d'Analyse.*