Question 114.

Construire un quadrilatère dont on donne les angles et les diagonales.

La *Question* 114 est énoncée et résolue par Matthew Collins L. L. D, dans le recueil déjà cité p. 115 (*N. C. M.*, tome II).

Voici la traduction du passage relatif à cette question :

« Soit ABCD le quadrilatère cherché; alors, comme BD et l'angle BCD sont donnés, on en conclut, d'après Euclide, livre III, prop. 21 et 33, que le cercle BCD est déterminé; et, par suite, que les angles donnés CBA, CDA, se trouvent interceptés entre des arcs constants CDE et CBF de cette circonférence; et, comme le cercle CEF est entièrement déterminé, on en conclut que l'arc restant EF est donné, et qu'ainsi l'angle EAF, opposé à la corde donnée EF, est connu et égal à l'angle BAD. Par conséquent (III, 21), le lieu du point A est une circonférence déterminée EAF : entre cet arc et le sommet C, nous pouvons infléchir l'autre diagonale donnée CA, et, ainsi, déterminer complétement et construire, au moyen des données de la question, le quadrilatère demandé. » (H. B.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Concours de 1876. — Seconde composition de Mathématiques.

On considère une hyperbole équilatère fixe et une infinité de cercles, concentriques à cette courbe. A chacun des cercles, on mène des tangentes qui soient en même temps normales à l'hyperbole. On prend le milieu de la distance qui sépare le point de *contact, avec le cercle variable, du point d'incidence sur l'hyperbole fixe. On demande le lieu géométrique de ces milieux.*

Prenons, pour axes de coordonnées rectangulaires, les asymptotes de l'hyperbole. L'équation de cette courbe sera

$$xy = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

La normale, et la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite, sont représentées par :

$$Y - y = \frac{x}{y}(X - x) \quad . \quad . \quad (2), \qquad Y = -\frac{y}{x}X. \quad . \quad . \quad (3)$$

On tire, de ces équations :

$$X = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Les coordonnées du point du lieu, situé sur la normale considérée, ont pour valeurs :

$$\alpha = \frac{1}{2}(X + x), \quad \beta = \frac{1}{2}(Y + y);$$

ou, réductions faites :

$$\alpha = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad \beta = \frac{y^3}{x^2 + y^2} \text{ (*)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

L'élimination de x et de y, entre les équations (1), (5), donnera l'équation du lieu.

On conclut, des valeurs (5) :

$$\frac{x}{\sqrt[3]{\alpha}} = \frac{y}{\sqrt[3]{\beta}} = \sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2};$$

(*) Tout ce qui précède est tiré d'une Note de M. H. Brocard.

par conséquent, l'équation cherchée est

$$a^2 = \sqrt[3]{\alpha\beta}\,(\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2})^2 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

ou

$$(a^2 - 2\alpha\beta)^3 = \alpha\beta(\sqrt[3]{\alpha^4} + \sqrt[3]{\beta^4})^3,$$

ou enfin, après quelques réductions faciles :

$$a^2(a^2 - 3\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2\alpha\beta \text{ (*)} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

D'après la relation (6), l'équation du lieu, en coordonnées polaires, serait

$$u = \pm \frac{a}{\sqrt[6]{\sin\omega\cos\omega}\,\sqrt[3]{(\sin^2\omega + \sqrt[3]{\cos^2\omega})}} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

(E. C.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

214. Théorème empirique. Le triple de tout carré impair, non divisible par 3, est égal à la somme des carrés de trois nombres premiers, autres que 2 et 3.

(*) Par un procédé complétement différent du nôtre, M. H. B. parvient à la relation (7). Il est assez remarquable que, en vertu de cette équation, *les deux expressions*

$$\sqrt[6]{\alpha\beta}(\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2}), \qquad \frac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\alpha\beta}}{a^2 - 3\alpha\beta},$$

bien différentes de forme, *sont identiques.*