SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 38.

Démontrer que les seules racines réelles de l'équation

$$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1 = 0, \quad \ldots \quad (1)$$

sont

$$0, \quad -1 \quad et \quad -\frac{1}{2}.$$

(E. C.)

Pour vérifier la propriété remarquable dont jouit l'équation (1), il suffit de construire la courbe représentée par

$$y = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1,$$

ou, plus simplement, par

$$y = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n} - x. \quad \ldots \quad (3)$$

La discussion, très-simple, prouve que : 1° la courbe a pour centre la nouvelle origine; 2° ce point appartient à la courbe;

3° celle-ci coupe encore l'axe des abscisses aux points déterminés par $x = \pm 1$; si x croît indéfiniment, à partir de $+1$, y croît aussi indéfiniment; etc. (E. C.)

Question 39.

Former l'équation qui n'admet que les racines imaginaires de la proposée, c'est-à-dire, trouver le quotient Q *de*

$$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$$

par

$$x(x+1)(2x+1).$$

(E. C.)

Soit

$$f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1 = (x+1)^{2n} - x^{2n} - \left[(x+1) + x\right].$$

Cette décomposition donne :

$$1^\circ \qquad Q_1 = \frac{f(x)}{2x+1} = \frac{f(x)}{(x+1)+x} =$$

$$(x+1)^{2n-1} - x(x+1)^{2n-2} + x^2(x+1)^{2n-3} - \cdots + x^{2n-2}(x+1) - x^{2n-1} - 1;$$

$$2^\circ \qquad Q_2 = \frac{Q_1}{x+1} =$$

$$(x+1)^{2n-2} - x(x+1)^{2n-3} + x^2(x+1)^{2n-4} - \cdots + x^{2n-2} - \frac{x^{2n-1}+1}{x+1} =$$

$$(x+1)^{2n-2} - x(x+1)^{2n-3} + x^2(x+1)^{2n-4} - \cdots + x^{2n-2}$$
$$- x^{2n-2} + x^{2n-3} - x^{2n-4} + \cdots + x - 1;$$

$$3^\circ\ Q = \frac{Q_2}{x} = \frac{(x+1)^{2n-2} - 1}{x} - (x+1)^{2n-3} + x(x+1)^{2n-4} - \cdots + x^{2n-3}$$
$$- x^{2n-3} + x^{2n-4} - x^{2n-5} + \cdots + 1.$$

Et comme

$$\frac{(x+1)^{2n-2}-1}{x} = \frac{(x+1)^{2n-2}-1}{(x+1)-1} =$$

$$(x+1)^{2n-3} + (x+1)^{2n-4} + \cdots + (x+1) + 1;$$

$$\left.\begin{aligned} Q = {} & (x+1)^{2n-4} + (x+1)^{2n-5} + (x+1)^{2n-6} + \cdots + (x+1) + 1 \\ & + \left[(x+1)^{2n-4} - x(x+1)^{2n-5} + x^2(x+1)^{2n-6} - \cdots + x^{2n-4}\right] \\ & - x^{2n-3} + x^{2n-4} - x^{2n-5} + \cdots - x + 1. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Par conséquent, l'équation $Q = 0$ est celle qui était demandée.

(E. C.)

Question 40.

Prouver que, si l'on fait $y = 2x + 1$, *la transformée de l'équation réduite est*

$$C_1 y^{2n-4} + (C_1 + C_3) y^{2n-6} + (C_1 + C_3 + C_5) y^{2n-8} + \cdots$$
$$+ (C_1 + C_3 + C_5 + \cdots + C_{2n-3}) y^0 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dans celles-ci :

$$C_1 = \frac{2n}{1}, \quad C_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}, \quad \ldots$$

(E. C.)

Au lieu de transformer l'équation $Q = 0$, il vaut mieux recourir à la proposée. Si l'on y fait $x = \frac{y-1}{2}$, elle devient

$$(y+1)^{2n} - (y-1)^{2n} - 2^{2n} y = 0;$$

ou, en supprimant la racine nulle :

$$C_1 y^{2n-2} + C_3 y^{2n-4} + C_5 y^{2n-6} + \cdots + C_1 - 2^{2n-1} = 0. \quad . \quad (5)$$

Ainsi qu'on l'a vu plus haut, le premier membre est divisible par $y^2 - 1$ (*) ; effectuant, on trouve

$$C_1 y^{2n-4} + (C_1 + C_3) y^{2n-6} + (C_1 + C_3 + C_5) y^{2n-8} + \cdots$$
$$+ (C_1 + C_3 + C_5 + \cdots C_{2n-3}) y^0 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Telle est la *transformée* de $Q = 0$.

Remarque. Si l'on fait $y^2 = -z$, l'équation (5) devient

$$C_1 z^{n-1} - C_3 z^{n-2} + C_5 z^{n-3} - \cdots \pm (2^{2n-1} - C_1) = 0 \text{ (**)}. \quad . \quad (7)$$

Très-probablement, cette équation a $n - 2$ *racines positives*. Si l'on pouvait démontrer qu'il en est ainsi (***), *toutes les racines de l'équation* (6) auraient la forme $\beta\sqrt{-1}$. (E. C.)

Question 148.

La somme des carrés des coefficients de $(x + y)^{2m}$, *pris avec des signes alternés, est égale, en valeur absolue, au plus grand de ces coefficients.*

Rousseau,
répétiteur au Lycée de Moulins.

Dans le développement de $(x + y)^{2m}$, le coefficient du terme de rang $m + 1$ est :

$$\frac{2m(2m-1)\cdots(m+1)}{1.2.3.\cdots m}.$$

(*) Conséquemment,

$$C_1 + C_3 + C_5 + \cdots + C_1 = 2^{2n-1};$$

relation connue.

(**) Le signe + correspond au cas de *n pair*.

(***) Le théorème de De Gua est inapplicable, parce que la réciproque de ce théorème est fausse : l'équation

$$x^7 + x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0,$$

a des racines imaginaires, bien que les coefficients satisfassent aux conditions

$$B^2 > AC, \quad C^2 > BD, \quad D^2 > CE, \quad \cdots.$$