SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Les Questions 107, 61, 110, 115, 118, 84, 119 et 125 ont été résolues par M. J. Freson, élève à l'Athénée de Liége. — Les trois dernières l'ont été aussi par M. G. Lambiotte, élève au même établissement. — Enfin, M. Brocard nous a envoyé une solution, très-simple, de la Question 115.

Question 116.

Intégrer l'équation

$$xy'' + \tfrac{1}{2}y' - y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(E. C.)

I. On peut l'écrire ainsi :

$$\cancel{2xdy' + y'dx = 2ydx} \quad 2x\,dy' + y'dx = 2y\,dx$$

Le facteur y' rend chaque membre différentielle exacte :

$$d\,(xy'^2) = d\,(y^2);$$

et l'on a, en intégrant,

$$xy'^2 = y^2 + C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

On déduit, de cette intégrale première,

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 + C}}{\sqrt{x}};$$

ou, en séparant les variables,

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C}};$$

puis

$$2\sqrt{x} = l\,C'\left(y + \sqrt{y^2 + C}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

L'équation (3), renfermant deux constantes arbitraires C, C', est l'intégrale générale de la proposée (1). On peut la mettre sous la forme

$$y = Ae^{2\sqrt{x}} + Be^{-2\sqrt{x}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

II. La relation qui existe entre les fonctions circulaires et les exponentielles donne l'idée d'essayer aussi l'expression

$$y = A \cos 2\sqrt{x} + B \sin 2\sqrt{x}.$$

On reconnaît qu'elle satisfait à l'équation différentielle

$$xy'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0,$$

qui diffère, de la proposée, par le signe de y.

III. Si, reprenant l'équation donnée, on pose

$$x = \frac{t^2}{4},$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{t^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{4}{t^3}\frac{dy}{dt}.$$

Par suite, l'équation proposée devient :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0,$$

dont l'intégrale est représentée par la fonction

$$y = Ae^t + Be^{-t}.$$

On retrouve donc la même intégrale générale.

H. Brocard.

Note du Rédacteur. — « En essayant de sommer la *série de Legendre* (*) :

$$y_1 = 1 + \frac{x}{k} + \frac{x^2}{1.2\,k(k+1)} + \frac{x^3}{1.2.3\,k(k+1)(k+2)} + \cdots, \quad (5)$$

nous avons trouvé l'équation

$$xy'' + ky' - y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

» Lorsque $k = \frac{1}{2}$, la somme de la série est

$$y_1 = \tfrac{1}{2}\left(e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}\right),$$

résultat trouvé par l'illustre Géomètre.

» De là, on conclut aisément l'intégrale générale de l'équation (6) (**), relative à $k = \frac{1}{2}$; savoir :

$$y = \mathrm{A}e^{2\sqrt{x}} + \mathrm{B}e^{-2\sqrt{x}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

» Il était curieux de rechercher si l'équation (6), intégrable pour $k = \frac{1}{2}$, l'est pour d'autres valeurs de ce paramètre : c'est un problème que M. Le Paige me semble avoir heureusement résolu.

» En effet, après avoir établi, d'une manière fort simple, que si cette équation est intégrable pour $k = \lambda$, elle l'est pour $k = \lambda \pm n$, n étant un nombre entier, le jeune Docteur a eu recours à une transformation employée par Lagrange, au moyen de laquelle la proposée (6) devient l'*équation de Riccati :*

$$\frac{dy}{dx} = ax^m + by^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

» Or, M. Liouville a démontré que les seuls cas dans lesquels l'équation de Riccati est intégrable (en quantités finies, explicites)

(*) *Éléments de Géométrie*, p. 289 (édit. 1823).

(**) Ou de l'équation (1).

sont ceux où l'on a

$$m = -\frac{4p}{2p-1}, \quad m = -\frac{4(p+1)}{2p+1};$$

p étant un entier quelconque. Donc, à cause de la relation entre les paramètres m et k, de l'équation (6), *l'équation* (2) *n'est intégrable que si* $k = \frac{1}{2} \pm n$. Telle est la conclusion, très-intéressante, de M. Le Paige.....

» Dans mon cours à l'Université de Liége, j'ai considéré ce cas particulier de la série (5) :

$$S = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \cdots$$

A priori, la sommation de cette série semble ne pas devoir être plus compliquée que celle de la série traitée par Legendre. Il n'en est rien : la valeur de S dépend de la quantité

$$\int_0^\pi e^{(1+x)\cos\theta} \cos(x \sin\theta)\cos(\sin\theta)\, d\theta \ldots \text{(*)}. \text{ »}$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

N. B. Les deux dernières questions de la livraison du mois d'août doivent porter, respectivement, les numéros *159, 160,* au lieu de *170, 161.*

161. Un ellipsoïde de révolution se déplace en touchant les trois faces d'un trièdre trirectangle. De quelle nature est la courbe qui, sur chaque face, limite les positions du point de contact de l'ellipsoïde et du plan? (H. Brocard) (**).

(*) *Rapport sur une Note de M. Le Paige.* Bull. de l'Acad. de Belgiq., t. XLI; mai 1876.

(**) La même question, étendue à un ellipsoïde quelconque, a été proposée, il y a une trentaine d'années, par M. Yvon Villarceau. Je crois qu'elle est restée sans solution. (E. C.)