

Periodical

Nouvelle correspondance mathématique

in: Nouvelle correspondance mathématique | Periodical

504 page(s)

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

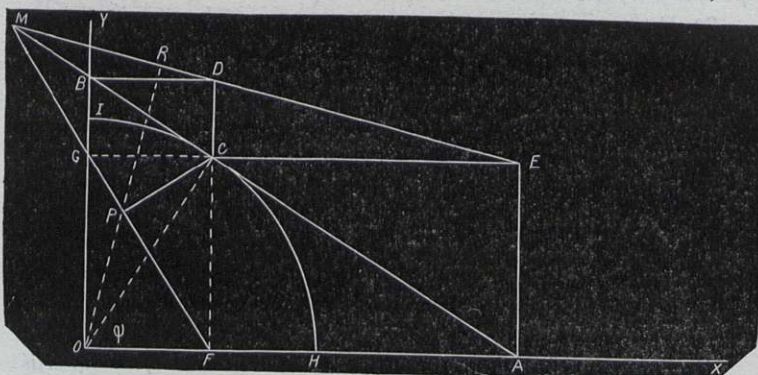
## Question 63.

Étant donnés deux axes rectangulaires OX, OY, et une droite AB, qui les rencontre aux points A, B; on projette le point O, en C, sur AB, et l'on construit, avec des parallèles aux axes, menées par A, B, C, les projections F, G de C, sur les axes, et les GRADINS BDC, CEA.

1° Le coefficient angulaire de DE est le cube du coefficient angulaire de BA.

2° Les droites FG, BA, DE se rencontrent en un même point M.

3° Quel est le lieu de ce point M, lorsque la distance CO reste constante?  
(H. BROCARD.)



I. Désignons par  $c$  la distance OC, et par  $\varphi$  l'angle COX; nous aurons

$$OF = c \cos \varphi, \quad OG = c \sin \varphi, \quad OA = \frac{c}{\cos \varphi}, \quad OB = \frac{c}{\sin \varphi};$$

puis, comme équations de AB, FG :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = c, \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$x \sin \varphi + y \cos \varphi = c \sin \varphi \cos \varphi. \quad \dots \dots \dots (2)$$

On trouve, avec la même facilité, que l'équation de DE est

$$x \cos^3 \varphi + y \sin^3 \varphi = c (\sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi). \quad \dots (3)$$

Il est visible : 1° que cette équation est une conséquence des deux premières; 2° que  $-\frac{\cos^5 \varphi}{\sin^5 \varphi} = \left(-\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right)^5$ . Donc les deux premières parties de la question sont résolues.

II. Pour trouver l'équation du lieu de M, on doit éliminer  $\varphi$  entre les équations (1), (2). En général, le résultat de l'élimination de  $\varphi$  entre les égalités

$$A' \sin \varphi + B' \cos \varphi = C', \quad A \sin \varphi + B \cos \varphi = C \sin \varphi \cos \varphi, \quad (4)$$

est (\*) :

$$\begin{aligned} & (A'^2 + B'^2) [(A^2 + B^2) C'^2 - (AB' - BA')^2] \\ & + 2CC' [AB' (B'^2 - C'^2) + BA' (A'^2 - C'^2)] \\ & + C^2 (A'^2 - C'^2) (B'^2 - C'^2) = 0. \end{aligned}$$

Dans le cas actuel,  $A = x$ ,  $B = y$ ,  $A' = y$ ,  $B' = x$ ,  $C = C' = c$ ; donc l'équation demandée est

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2) [(x^2 + y^2) c^2 - (x^2 - y^2)^2] + 2c^2 [x^2 (x^2 - c^2) + y^2 (y^2 - c^2)] \\ & + c^2 (y^2 - c^2) (x^2 - c^2) = 0; \end{aligned}$$

ou, après quelques réductions,

$$(x^2 + y^2) (x^2 - y^2)^2 - 5 (x^4 + x^2 y^2 + y^4) c^2 + 5 (x^2 + y^2) c^4 - c^6 = 0 \quad (**). \quad (5)$$

III. Les équations (1), (2), résolues par rapport à  $x$ ,  $y$ , donnent

$$x = c \frac{\cos^5 \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}, \quad y = -c \frac{\sin^5 \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}. \quad (6)$$

Il résulte, de celles-ci :

$$\left. \begin{aligned} dx &= c \sin \varphi \cos^3 \varphi \frac{5 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2} d\varphi, \\ dy &= c \sin^2 \varphi \cos \varphi \frac{\sin^2 \varphi + 5 \cos^2 \varphi}{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2} d\varphi; \end{aligned} \right\} \dots \quad (7)$$

(\*) (*Mélanges mathématiques*, p. 218.) On effectue aisément cette élimination en résolvant les équations (4), successivement par rapport à  $\sin \varphi$  et  $\cos \varphi$ .

(\*\*) M. Vladimir HABBÉ (de Nicolaïev) a trouvé ce résultat, mais sans indiquer comment il y est parvenu.



puis, si l'on désigne par  $s$  la *longueur de la courbe*, comptée à partir d'une certaine origine :

$$ds = c \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \sqrt{\sin^4 \varphi + 14 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi}. \quad (8)$$

Si l'on fait  $\cos 2\varphi = z$ , que l'on transforme la différentielle précédente, et que l'on intègre, on trouve, en supposant  $s = 0$  pour  $\varphi = 0$  :

$$s = \frac{c}{4} \left[ \frac{\sqrt{4 - 5z^2}}{z} + \sqrt{5} \arcsin \left( \frac{z}{2} \sqrt{5} \right) - 1 - \frac{\pi}{\sqrt{5}} \right] (*). \quad (9)$$

IV. La droite  $FG = OC = c$ ; donc l'enveloppe de cette droite est l'*épicycloïde* représentée par

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}} (**).$$

On obtient le point  $P$ , commun à l'enveloppe et à l'enveloppée  $FG$ , en abaissant  $CP$  perpendiculaire sur  $FG$  (\*\*).

V. Aux propriétés signalées par M. Brocard, on peut ajouter celles-ci :

1° Le *coefficient angulaire* de  $OP$  est le cube du coefficient angulaire de  $OC$ ; 2° la droite  $OPR$  est perpendiculaire à  $DE$ ; 3° le point  $M$  divise la droite  $FG$  en deux segments  $PM$ ,  $GM$ , proportionnels à  $OF$ ,  $OG$ ; etc. (E. C.)

(\*) Nous engageons nos jeunes lecteurs, non-seulement à discuter les formules (6), mais encore à développer tous les calculs dont nous donnons les éléments et les résultats.

(\*\*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, pp. 458, 459, 467.

(\*\*\*) Cette construction, démontrée dans l'ouvrage cité, résulte de la théorie des *centres instantanés*, due à M. Chasles.