SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 63.

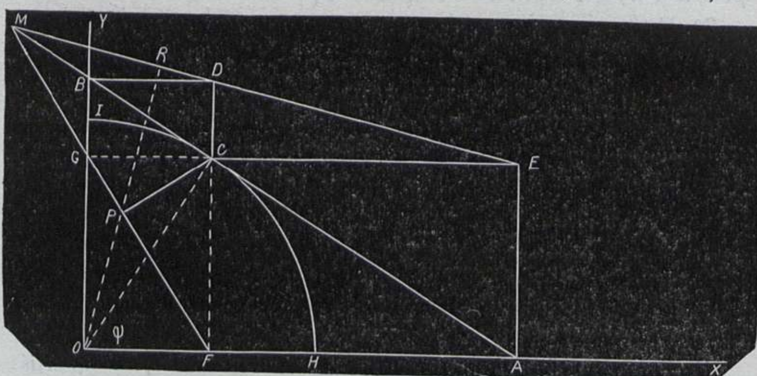
Étant donnés deux axes rectangulaires OX, OY, *et une droite* AB, *qui les rencontre aux points* A, B; *on projette le point* O, *en* C, *sur* AB, *et l'on construit, avec des parallèles aux axes, menées par* A, B, C, *les projections* F, G *de* C, *sur les axes, et les* GRADINS BDC, CEA.

1° *Le coefficient angulaire de* DE *est le cube du coefficient angulaire de* BA.

2° *Les droites* FG, BA, DE *se rencontrent en un même point* M.

3° *Quel est le lieu de ce point* M, *lorsque la distance* CO *reste constante?*

(H. BROCARD.)



I. Désignons par c la distance OC, et par φ l'angle COX ; nous aurons

$$OF = c\cos\varphi,\quad OG = c\sin\varphi,\quad OA = \frac{c}{\cos\varphi},\quad OB = \frac{c}{\sin\varphi};$$

puis, comme équations de AB, FG :

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = c, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$x\sin\varphi + y\cos\varphi = c\sin\varphi\cos\varphi. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

On trouve, avec la même facilité, que l'équation de DE est

$$x\cos^3\varphi + y\sin^3\varphi = c(\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi). \quad . \quad (3)$$

Il est visible : 1° que cette équation est une conséquence des deux premières; 2° que $-\frac{\cos^3\varphi}{\sin^3\varphi}=\left(-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^3$. Donc les deux premières parties de la question sont résolues.

II. Pour trouver l'équation du lieu de M, on doit éliminer φ entre les équations (1), (2). En général, le résultat de l'élimination de φ entre les égalités

$$A'\sin\varphi + B'\cos\varphi = C', \quad A\sin\varphi + B\cos\varphi = C\sin\varphi\cos\varphi, \quad (4)$$

est (*) :

$$\begin{aligned}&(A'^2 + B'^2)\left[(A^2+B^2)C'^2 - (AB' - BA')^2\right]\\ &+ 2CC'\left[AB'(B'^2 - C'^2) + BA'(A'^2 - C'^2)\right]\\ &+ C^2(A'^2 - C'^2)(B'^2 - C'^2) = 0.\end{aligned}$$

Dans le cas actuel, $A=x$, $B=y$, $A'=y$, $B'=x$, $C=C'=c$; donc l'équation demandée est

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)c^2-(x^2-y^2)^2\right] + 2c^2\left[x^2(x^2-c^2)+y^2(y^2-c^2)\right]\\ + c^2(y^2-c^2)(x^2-c^2)=0;\end{aligned}$$

ou, après quelques réductions,

$$(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2 - 3(x^4+x^2y^2+y^4)c^2 + 3(x^2+y^2)c^4 - c^6 = 0 \text{ (**)}. \quad (5)$$

III. Les équations (1), (2), résolues par rapport à x, y, donnent

$$x = c\frac{\cos^3\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}, \quad y = -c\frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}. \; . \; . \quad (6)$$

Il résulte, de celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}dx &= c\sin\varphi\cos^2\varphi\frac{3\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2}d\varphi,\\ dy &= c\sin^2\varphi\cos\varphi\frac{\sin^2\varphi+3\cos^2\varphi}{(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2}d\varphi;\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \quad (7)$$

(*) (*Mélanges mathématiques*, p. 218.) On effectue aisément cette élimination en résolvant les équations (4), *successivement par rapport à* $\sin\varphi$ *et* $\cos\varphi$.

(**) M. Vladimir Habbé (de Nicolaiev) a trouvé ce résultat, mais sans indiquer comment il y est parvenu.

puis, si l'on désigne par s la *longueur de la courbe*, comptée à partir d'une certaine origine :

$$ds = c\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^2}d\varphi\sqrt{\sin^4\varphi + 14\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi}. \quad (8)$$

Si l'on fait $\cos 2\varphi = z$, que l'on transforme la différentielle précédente, et que l'on intègre, on trouve, en supposant $s = 0$ pour $\varphi = 0$:

$$s = \frac{c}{4}\left[\frac{\sqrt{4-3z^2}}{z} + \sqrt{3}\arcsin\left(\frac{z}{2}\sqrt{3}\right) - 1 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right] (*). \ . \quad (9)$$

IV. La droite FG $=$ OC $= c$; donc l'enveloppe de cette droite est l'*épicycloïde* représentée par

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}} (**).$$

On obtient le point P, commun à l'enveloppe et à l'enveloppée FG, en abaissant CP perpendiculaire sur FG (**).

V. Aux propriétés signalées par M. Brocard, on peut ajouter celles-ci :

1° *Le coefficient angulaire de* OP *est le cube du coefficient angulaire de* OC; 2° *la droite* OPR *est perpendiculaire à* DE; 3° *le point* M *divise la droite* FG *en deux segments* PM, GM, *proportionnels à* OF, OG; etc. (E. C.)

(*) Nous engageons nos jeunes lecteurs, non-seulement à *discuter* les formules (6), mais encore à développer tous les calculs dont nous donnons les éléments et les résultats.

(**) *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*, pp. 458, 459, 467.

(***) Cette construction, démontrée dans l'ouvrage cité, résulte de la théorie des *centres instantanés*, due à M. Chasles.