

Article

Sur un produit de sinus.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance  
mathématique - 2 | Principes de géométrie tricirculaire et tétrasphérique.  
Démonstration de...

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:  
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

SUR UN PRODUIT DE SINUS.

L'année dernière, au Congrès de Nantes (\*), M. Laisant (\*\*)  
a communiqué la formule :

$$\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \dots \sin 90^\circ = \frac{5\sqrt{10}}{2 \cdot 4^{44}} \dots \dots \dots \text{(A)}$$

D'un autre côté, M. Brocard ayant trouvé récemment, dans  
les *Archives de Grunert*, la question suivante :

*Démontrer la formule*

$$2m = 2^{2m-1} \left[ \sin \frac{\pi}{2m} \cdot \sin \frac{2\pi}{2m} \cdot \sin \frac{3\pi}{2m} \dots \sin \frac{(m-1)\pi}{2m} \right]^2; \text{ (B)}$$

nous croyons pouvoir consacrer quelques lignes à cette rela-  
tion (B), dont (A) est un cas particulier.

I. La formule (B) est loin d'être nouvelle : on la trouve dans  
le *Traité des fonctions elliptiques* (\*\*\*), de Legendre; l'illustre  
auteur la conclut d'une relation plus générale, due à Euler (\*\*\*\*).  
Voici comment on peut la démontrer :

(\*) Séance du 21 août 1875.

(\*\*) Notre jeune et honorable camarade, aujourd'hui Député de la Loire-  
Inférieure, n'a plus guère de temps à consacrer aux Mathématiques. Néan-  
moins, nous pouvons encore le compter parmi les Collaborateurs de la  
*Nouvelle Correspondance*.

(\*\*\*) Tome II, p. 445.

(\*\*\*\*) *Introduction à l'Analyse*, tome I, p. 195.

La théorie des équations binômes donne l'identité

$$x^{2m-2} + x^{2m-4} + \dots + x^2 + 1 =$$

$$\left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{m} + 1\right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{m} + 1\right) \dots \left(x^2 - 2x \cos \frac{\overline{m-1}\pi}{m} + 1\right).$$

Pour  $x=1$ , celle-ci se réduit à

$$m = 2^{m-1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{m}\right) \dots \left(1 - \cos \frac{\overline{m-1}\pi}{m}\right),$$

ou

$$m = 2^{2m-2} \left[ \sin \frac{\pi}{2m} \cdot \sin \frac{2\pi}{2m} \dots \sin \frac{(m-1)\pi}{2m} \right]^2;$$

ce qui est la relation (B).

II. On sait que,  $n$  étant un nombre *pair*, la fonction  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$  est décomposable de la manière suivante :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{\sin \frac{x}{n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \frac{\sin \frac{\pi}{4n} \sin \frac{3\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi-x}{2n} \sin \frac{\pi+x}{2n}} \frac{\sin \frac{2\pi-x}{2n} \sin \frac{2\pi+x}{2n}}{\sin \frac{5\pi}{4n} \sin \frac{5\pi}{4n}} \dots$$

$$\frac{\sin \frac{(2n-3)\pi}{4n} \sin \frac{(2n-1)\pi}{4n}}{\sin \frac{(n-1)\pi-x}{2n} \sin \frac{(n-1)\pi+x}{2n}}.$$

Si, après avoir divisé les deux membres par  $\sin \frac{x}{n}$ , on suppose  $x=0$ , on trouve

$$n = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \frac{\sin \frac{\pi}{4n} \sin \frac{3\pi}{4n}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n}} \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{2n}}{\sin \frac{5\pi}{4n} \sin \frac{5\pi}{4n}} \dots \frac{\sin \frac{(2n-5)\pi}{4n} \sin \frac{(2n-1)\pi}{4n}}{\sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}};$$

puis, après quelques réductions,

$$n = \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{3\pi}{n} \dots \sin \frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right)\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \sin \frac{5\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}} \dots \right]^2 \quad (C)$$

Cette formule, que nous avons proposée, autrefois, dans les *Nouvelles Annales* (\*), ne diffère pas, au fond, de la relation (B). C'est ce dont il est facile de s'assurer. E. C.

### SUR UN THÉORÈME DE DIOPHANTE.

Sous le nom de *Porisme*, Diophante a cité la proposition suivante, énoncée par M. Chasles dans son ouvrage sur les *Porismes* d'Euclide (p. 49) :

QUESTION V. *Étant donnés deux nombres carrés consécutifs, on peut trouver un troisième nombre, égal au double de la somme des deux premiers, plus 2, tel, que le produit de deux de ces nombres, augmenté, soit de la somme des deux mêmes, soit du troisième nombre, fasse un carré.*

Soient donc

$$X = x^2, \quad Y = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

les deux nombres donnés. Le troisième, Z, sera exprimé par

$$Z = 2X + 2Y + 2 = 4x^2 + 4x + 4.$$

---

(\*) Elle a été démontrée, en 1866, par M. Busco.