SUR UN PRODUIT DE SINUS.

L'année dernière, au Congrès de Nantes (*), M. Laisant (**) a communiqué la formule :

$$\sin 1^\circ . \sin 2^\circ . \sin 3^\circ \ldots \sin 90^\circ = \frac{3\sqrt{10}}{2 . 4^{44}} . \quad . \quad . \quad . \qquad (A)$$

D'un autre côté, M. Brocard ayant trouvé récemment, dans les *Archives de Grunert*, la question suivante :

Démontrer la formule

$$2m = 2^{2m-1}\left[\sin\frac{\pi}{2m} \cdot \sin\frac{2\pi}{2m} \cdot \sin\frac{3\pi}{2m} \cdots \sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]^2; \qquad (B)$$

nous croyons pouvoir consacrer quelques lignes à cette relation (B), dont (A) est un cas particulier.

I. La formule (B) est loin d'être nouvelle : on la trouve dans le *Traité des fonctions elliptiques* (***), de Legendre; l'illustre auteur là conclut d'une relation plus générale, due à Euler (****). Voici comment on peut la démontrer :

(*) Séance du 21 août 1875.

(**) Notre jeune et honorable camarade, aujourd'hui Député de la Loire-Inférieure, n'a plus guère de temps à consacrer aux Mathématiques. Néanmoins, nous pouvons encore le compter parmi les Collaborateurs de la *Nouvelle Correspondance*.

(***) Tome II, p. 443.

(****) *Introduction à l'Analyse*, tome I, p. 193.

La théorie des équations binômes donne l'identité

$$x^{2m-2} + x^{2m-4} + \cdots + x^2 + 1 =$$

$$\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{m} + 1\right)\cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{\overline{m-1}\,\pi}{m} + 1\right).$$

Pour $x = 1$, celle-ci se réduit à

$$m = 2^{m-1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi}{2m}\right)\cdots\left(1 - \cos\frac{\overline{m-1}\,\pi}{m}\right),$$

ou

$$m = 2^{2m-2}\left[\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m}\cdots\cdot\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]^2;$$

ce qui est la relation (B).

II. On sait que, n étant un nombre *pair*, la fonction $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ est décomposable de la manière suivante :

$$tg\,\frac{1}{2}x = \frac{\sin\frac{x}{n}}{\sin\frac{\pi}{2\pi}}\;\frac{\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4\pi}}{\sin\frac{\pi-x}{2n}\sin\frac{\pi+x}{2n}}\;\frac{\sin\frac{2\pi-x}{2n}\sin\frac{2\pi+x}{2n}}{\sin\frac{5\pi}{4n}\sin\frac{5\pi}{4n}}\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{(2n-3)}{4n}\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{(n-1)\pi-x}{2n}\sin\frac{(n-1)\pi+x}{2n}}.$$

Si, après avoir divisé les deux membres par $\sin\frac{x}{n}$, on suppose $x = 0$, on trouve

$$\frac{n}{} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\;\frac{\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\;\frac{\sin^2\frac{2\pi}{2n}}{\sin\frac{5\pi}{4n}\sin\frac{5\pi}{4n}}\cdots\frac{\sin\frac{(2n-3)\pi}{4n}\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}}{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}};$$

puis, après quelques réductions,

$$n = \left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}\ \sin\frac{2\pi}{n}\ \sin\frac{3\pi}{n}\cdots\sin\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{3\pi}{2n}\ \sin\frac{5\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}} \cdots \right]^2 . \quad \text{(C)}$$

Cette formule, que nous avons proposée, autrefois, dans les *Nouvelles Annales* (*), ne diffère pas, au fond, de la relation (B). C'est ce dont il est facile de s'assurer. E. C.

SUR UN THÉORÈME DE DIOPHANTE.

Sous le nom de *Porisme*, Diophante a cité la proposition suivante, énoncée par M. Chasles dans son ouvrage sur les Porismes d'Euclide (p. 49) :

QUESTION V. *Étant donnés deux nombres carrés consécutifs, on peut trouver un troisième nombre, égal au double de la somme des deux premiers, plus 2, tel, que le produit de deux de ces nombres, augmenté, soit de la somme des deux mêmes, soit du troisième nombre, fasse un carré.*

Soient donc

$$X = x^2, \qquad Y = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

les deux nombres donnés. Le troisième, Z, sera exprimé par

$$Z = 2X + 2Y + 2 = 4x^2 + 4x + 4.$$

(*) Elle a été démontrée, en 1866, par M. Busco.