SUR UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE.

I. *Si, dans la série des nombres impairs :*

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \ldots\ldots,$$

on prend le premier terme, puis la somme des deux termes suivants, puis la somme des trois termes suivants, etc.; chacune de ces sommes est un cube.

Ce théorème, qui paraît dû à *Nicomaque de Gérase,* a été *découvert* par *Maurolicus, Fontana, Hamilton, d'Adhémar, Wheatstone,*....... (*). Le Professeur Midy l'a généralisé (*Nouvelles Annales,* t. V, p. 640). Cette généralisation, peu claire dans le petit Mémoire de Midy, peut être présentée comme il suit :

II. Problème. *Trouver plusieurs nombres impairs consécutifs, connaissant leur somme* s.

Soient x, y les termes extrêmes. Le nombre des termes de la progression est $\frac{y-x+2}{2}$; donc

$$s = \frac{x+y}{2}\,\frac{y-x+2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Supposons $s = s's''$, s' étant moindre que s''. Comme $\frac{x+y}{2}$ et $\frac{y-x+2}{2}$ sont entiers, on satisfait à l'équation (1) en prenant

$$x = s'' - s' + 1, \quad y = s' + s'' - 1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

(*) B. Boncompagni, *Bullettino di Bibliografia di Storia...* (janvier 1875). Nous regrettons de ne pouvoir citer cet excellent Recueil aussi souvent que nous en avons le désir. On sait qu'il est publié, à peu près *gratuitement,* par le prince B.

III. Soit $s = n^p$. Pour avoir un résultat simple, on peut faire

$$s' = n, \quad s'' = n^{p-1};$$

alors

$$x = n^{p-1} - n + 1, \quad y = n^{p-1} + n - 1;$$

puis

$$(n^{p-1} - n + 1) + (n^{p-1} - n + 3) + \cdots + (n^{p-1} + n - 1) = n^p. \quad (3)$$

IV. Si $p = 3$, l'égalité (3) devient le *Théorème de Nicomaque.*

V. Prenons $p = 5$: les valeurs de x, y sont

$$x = 1, \quad x = 15, \quad x = 79, \quad x = 253, \quad x = 621, \ldots;$$
$$y = 1, \quad y = 17, \quad y = 83, \quad y = 259, \quad y = 629, \ldots.$$

En effet :

$$15 + 17 = 2^5, \quad 79 + 81 + 83 = 3^5,$$
$$253 + 255 + 257 + 259 = 4^5, \text{ etc.}$$

VI. A la suite du Mémoire de Midy, le savant Terquem cite une proposition contenue dans l'*Arithmetica integra,* de Stiefel; proposition que l'on peut énoncer ainsi :

$$1 + 2^x + 4^x = \mathcal{M}\,.\,7,$$

si $x = 2^n$.

(E. C.)