Leurs intersections 6, 14, 8, 18, 12, 2, avec le cercle arguesien de la quartique, donnent les arguesiens des points de contact, qu'il est facile de déterminer.

L. PHILIPPIN,

élève de deuxième année à l'École normale des Sciences[1].

Note. — Il serait intéressant de démontrer géométriquement que les axes des paraboles, arguesiennes des tangentes menées, des points du cercle concentrique, au cercle circonscrit au triangle ABC, font entre eux un angle égal à la moitié du supplément de l'angle de ces tangentes (V. le n° IV de la solution précédente).

Question 24.

(N. C. M. p. 67.)

a, b *étant deux nombres entiers, décomposer, en trois carrés entiers*,

$$(1+a+b+a^2+ab+b^2)^2.$$

I. On a, identiquement,

$$(1+a+b+a^2+ab+b^2)^2 =$$
$$[(1+a)(a+b)]^2 + [(1+b)(a+b)]^2 + (1+a+b-ab)^2. \quad (1) \; [2]$$

II. Si l'on remplace a et b par $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, on trouve, au lieu de l'identité (1) :

$$(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 =$$
$$[(a+c)(a+b)]^2 + [(b+c)(a+b)]^2 + (c^2+ac+bc-ab)^2. \quad (2)$$

---

(1) C'est M. J. Derousseaux, condisciple de M. Philippin, qui a fourni à celui-ci l'équation du lieu, en coordonnées obliques (P. M).

(2) J'ai trouvé cette décomposition en traitant le *Problème de Malfatti* (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, octobre 1874). D'un autre côté, l'équation de la *toroïde* conduit à l'identité

$$(a^6+7a^3b^3+b^6)^2 = (a^4+2ab^3)^3 + (b^4+2a^3b)^3 + (3a^2b^2)^3,$$

laquelle donne une infinité de solutions de l'équation

$$u^2 = x^3+y^3+z^3.$$

S'il s'agissait de montrer combien est importante l'*Application de la Géométrie à l'Algèbre et à l'Arithmétique*, ces deux exemples seraient peut-être jugés insuffisants. Mais il y en a un autre, bien mémorable : *Douze siècles avant Euler, et probablement au moyen de considérations géométriques*, BRAHMEGUPTA *résolvait, en nombres entiers, l'équation* $Cx^2+A=y^2$. (CHASLES, *Aperçu historique.*)

Le premier membre est une fonction symétrique ; donc

$$(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 =$$
$$[(b+a)(b+c)]^2+[(c+a)(b+c)]^2+(a^2+ba+ca-bc)^2, \quad (3)$$
$$(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 =$$
$$[(c+b)(c+a)]^2+[(a+b)(c+a)]^2+(b^2+cb+ab-ca)^2. \quad (4)$$

Exemple : $a=5,\ b=3,\ c=4$. Les trois dernières relations deviennent :

$$(25+9+16+12+20+15)^2=(9.8)^2+(7.8)^2+(16+8.4-15)^2$$
$$=(8.7)^2+(9.7)^2+(25+7.5-12)^2$$
$$=(7.9)^2+(8.9)^2+(9+9.3-20)^2\ ;$$

ou

$$97^2=72^2+56^2+33^2=56^2+63^2+48^2=63^2+72^2+16^2\ ;$$

ou enfin

$$9\,409=5\,184+3\,136+1\,089=3\,136+3\,969+2\,304=$$
$$3\,969+5\,184+256\ ;$$

ce qui est exact.

III. On a

$$a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab =$$
$$\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

Parmi les nombres entiers a, b, c, il y en a deux, au moins, de même parité : appelons-les b, c. Soient ensuite :

$$a+\frac{b+c}{2}=f,\ \frac{b+c}{2}=g,\ \frac{b-c}{2}=h.$$

Au moyen de ces nouvelles notations, nous pourrons écrire ainsi les identités (2), (3), (4) :

$$(f^2+2g^2+h^2)^2=(f^2-h^2)^2+[2g(f+h)]^2+(2fh-2g^2)^2, \quad (5)$$
$$(f^2+2g^2+h^2)^2=[2g(f+h)]^2+[2g(f-h)]^2+(f^2-2g^2+h^2)^2, \quad (6)$$
$$(f^2+2g^2+h^2)^2=(f^2-h^2)^2+[2g(f-h)]^2+(2fh+2g^2)^2. \quad (7)$$

IV. M. Neuberg, notre honorable et zélé collaborateur, nous a fait observer que

$$(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 =$$
$$[a(a+b+c)]^2+[b(a+b+c)]^2+[c(a+b+c)]^2+(bc+ca+ab)^2.$$

En conséquence,

$$(f^2+2g^2+h^2)^2 =$$
$$(f^2-g^2)^2+[(f+g)(g+h)]^2+[(f+g)(g-h)]^2+(h^2-2fg+g^2) \; ; \quad (9)$$

et, par l'interversion des lettres f, h :

$$(f^2+2g^2+h^2)^2 =$$
$$(h^2-g^2)^2+[(f+g)(g+h)]^2+[(f-g)(g+h)]^2+(f^2-2gh+h^2)^2. \quad (10)$$

V. Si l'on change f en $-f$, g en $-g$, h en $-h$, on obtient encore :

$$(f^2+2g^2+h^2)^2 =$$
$$(f^2-g^2)^2+[(f-g)(g+h)]^2+[(f-g)(g-h)]^2+(g^2+2fg+h^2)^2, \quad (11)$$
$$(f^2+2g^2+h^2)^2 =$$
$$(g^2-h^2)^2+[(f-g)(g-h)]^2+[(f+g)(g-h)]^2+(f^2+2gh+g^2)^2. \quad (12)$$

VI. D'après un théorème connu [1], *tout nombre impair est de la forme* $f^2+2g^2+h^2$. Donc *tout carré impair est généralement décomposable en trois carrés et en quatre carrés* [2].

Exemple. Soient $f=2$, $g=3$, $h=5$; d'où résulte $f^2+2g^2+h^2 = 47$. On a donc

$$47^2 = 21^2+42^2+2^2 = 42^2+18^2+11^2 = 21^2+18^2+38^2$$
$$= 5^2+40^2+10^2+22^2 = 16^2+40^2+8^2+17^2 = 5^2+8^2+2^2+46^2$$
$$= 16^2+2^2+10^2+43^2.$$

VII. Chacune des relations (5), (6), (7) permet de *trouver un nombre qui soit, en même temps, une somme et une différence de deux carrés.* En particulier, l'identité (6) donne

$$P^2-Q^2 = [2g(f+h)]^2 + [2g(f-h)]^2 \; ;$$

en supposant

$$P = f^2+2g^2+h^2, \quad Q = f^2-2g^2+h^2. \; [3]$$

E. C.

Note. Des solutions de la question 24 nous ont été envoyées par MM. Van Aubel, Ledent et P. S.

---

[1] Legendre, *Théorie des nombres*, tome I, p. 216.

[2] Les cas d'exception, assez nombreux, résultent des identités ci-dessus. Voici les principaux : 1° $f=0$; 2° $g=0$; 3° $h=0$; 4° $f=g$; 5° $f=h$; 6° $g=h$; 7° $fh=g^2$; 8° $f^2+g^2=2gh$; 9° $g^2+h^2=2fg$.

[3] Les nombres P, Q pourraient être dits, *associés.*