SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE.

PROBLÈME. *Trouver le lieu décrit par le point de contact mutuel de deux circonférences variables, tangentes à deux circonférences fixes* (¹).

Soient R, R′ les rayons des circonférences données O, O′; d, la distance des centres de ces circonférences. Nommons α, β les coordonnées du centre de la circonférence variable C, dont le rayon sera représenté par ρ. Soient α', β', ρ' les quantités analogues, relatives à la circonférence C′. Enfin, appelons x, y les coordonnées du point de contact M. Nous aurons :

$$\alpha^2+\beta^2=(R+\rho)^2 \quad (1), \qquad (d-\alpha)^2+\beta^2=(R'+\rho)^2 \quad (2),$$

$$\alpha'^2+\beta'^2=(R+\rho')^2 \quad (3), \qquad (d-\alpha')^2+\beta'^2=(R'+\rho')^2 \quad (4),$$

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2=(\rho+\rho')^2 \quad (5),$$

$$\frac{x-\alpha}{\alpha'-x}=\frac{\rho}{\rho'} \quad (6), \qquad \frac{y-\beta}{\beta'-y}=\frac{\rho}{\rho'} \quad (7)\ (^2)$$

Si, entre ces équations, nous éliminons α, β, α', β', ρ et ρ', nous obtiendrons l'équation du lieu cherché.

On satisfait aux équations (5), (6), (7) en prenant

$$x-\alpha=\rho\cos\varphi,\ y-\beta=\rho\sin\varphi,\ \alpha'-x=\rho'\cos\varphi,\ \beta'-y=\rho'\sin\varphi.$$

(¹) Ce problème est proposé, comme exercice, dans la *Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, et dans le *Manuel des candidats à l'École polytechnique*. Plusieurs abonnés nous ont demandé que la *Nouvelle Correspondance* publiât les solutions de cette question et de quelques autres, réputées difficiles par les étudiants. La note actuelle est tirée de notre *Application de l'Algèbre à la Géométrie* (1848). Quant à la solution *géométrique* du problème, on peut consulter les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, 5ᵉ édit., p. 197.

(²) Ces équations supposent que les quatre cercles O, O′, C, C′ sont, deux à deux, *extérieurs* l'un à l'autre.

Au moyen de ces relations, dont la signification géométrique est visible, les équations (1), (2), (3), (4) deviennent :

$$x^2 + y^2 - 2\rho\,(x \cos \varphi + y \sin \varphi) = \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}\rho,$$
$$d^2 - 2d\,(x - \rho \cos \varphi) = (\mathrm{R}' - \mathrm{R})\,(\mathrm{R}' + \mathrm{R} + 2\rho),$$
$$x^2 + y^2 + 2\rho'\,(x \cos \varphi + y \sin \varphi) = \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}\rho',$$
$$d^2 - 2d\,(x + \rho' \cos \varphi) = (\mathrm{R}' - \mathrm{R})\,(\mathrm{R}' + \mathrm{R} + 2\rho').$$

Entre ces quatre équations, combinées deux à deux, éliminons ρ et ρ' ; nous obtiendrons, par un calcul facile :

$$(x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2)\,(\mathrm{R}' - \mathrm{R} - d \cos \varphi) =$$
$$(d^2 - 2dx + \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2)\,(\mathrm{R} + x \cos \varphi + y \sin \varphi),$$
$$(x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2)\,(\mathrm{R}' - \mathrm{R} + d \cos \varphi) =$$
$$(d^2 - 2dx + \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2)\,(\mathrm{R} - x \cos \varphi - y \sin \varphi).$$

Ajoutant membre à membre, on trouve

$$(\mathrm{R}' - \mathrm{R})\,(x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2) = \mathrm{R}\,(d^2 - 2dx + \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2),$$

ou enfin

$$x^2 + y^2 - 2\,\frac{\mathrm{R}d}{\mathrm{R} - \mathrm{R}'}\,x + \mathrm{R}\mathrm{R}' + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} - \mathrm{R}'}\,d^2 = 0. \qquad \text{(A)}$$

Le lieu demandé est donc une circonférence ayant son centre I sur OO′, à une distance du centre O égale à $\frac{\mathrm{R}d}{\mathrm{R} - \mathrm{R}'}$. D'après cette valeur, *le centre* I *est le point de concours des tangentes communes aux cercles donnés*, extérieures à ces cercles. Quant au rayon l de la circonférence I, il est donné par la formule

$$l^2 = \left(\frac{\mathrm{R}d}{\mathrm{R} - \mathrm{R}'} - \mathrm{R}\right)\left(\frac{\mathrm{R}'d}{\mathrm{R} - \mathrm{R}'} + \mathrm{R}'\right). \qquad \text{(B)}$$

Soient A, A′ les points où OO′ coupe les circonférences données. Le premier facteur représente OI — OA = IA ; le second représente IA′. Donc *le rayon* IM *est moyen proportionnel entre les distances* IA, IA′ [1].

---

[1] *Théorèmes et Problèmes*, p. 198.

Remarque. Les équations des cercles O, O′ étant

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 \text{ (O)}, \quad (x-d)^2 + y^2 - R'^2 = 0 \text{ (O')} ;$$

les cercles O, O′, I, considérés deux à deux, ont trois *axes radicaux*, dont les équations sont, d'après la règle connue:

$$(O, O') \qquad 2dx - d^2 - R^2 + R'^2 = 0,$$

$$(O, I) \qquad -R^2 + 2\frac{Rd}{R-R'}x - RR' - \frac{R}{R-R'}d^2 = 0,$$

$$(O', I) \qquad -2dx + d^2 - R'^2 + 2\frac{Rd}{R-R'}x - RR' - \frac{R}{R-R'}d^2 = 0.$$

En simplifiant les deux dernières, on retombe sur la première ; donc, *les trois axes radicaux coïncident ;* ou, ce qui est équivalent : les circonférences O, O′, I, *considérées deux à deux, ont les mêmes points d'intersection, réels ou imaginaires*

E. C.

THÉORÈMES SUR LES COURBES ET LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE ;

par M. Louis Saltel, professeur à Fontenay-le-Comte.

1. Théorèmes sur les courbes.

Théorème I. *Soient* P *un point arbitraire d'une courbe plane* Σ, *du troisième ordre, et* PAB *une sécante quelconque, issue de ce point et rencontrant la courbe aux points* A, B. *Représentons par* (C, D, E), (C′, D′, E′) *six nouveaux points arbitraires de cette courbe, et considérons les deux coniques*

(ABCDE), (ABC′D′E′).

Si l'on désigne par λ, λ' *les sixièmes points communs à ces coniques et à* Σ, *et par* α_1, α_2 *les points communs à cette dernière courbe et à une sécante arbitraire, issue de* P ; *ces deux points* α_1, α_2 *sont les points homologues communs aux deux involutious que cette sécante détermine sur les deux quadrilatères*

(CDE λ), (C′D′E′λ').