

Article

Sur un lieu géométrique.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance mathématique - 1 | Principes de la théorie des déterminants. Sur deux problèmes de simon l...

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:  
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE.

PROBLÈME. *Trouver le lieu décrit par le point de contact mutuel de deux circonférences variables, tangentes à deux circonférences fixes* (1).

Soient R, R' les rayons des circonférences données O, O'; d, la distance des centres de ces circonférences. Nommons  $\alpha, \beta$  les coordonnées du centre de la circonférence variable C, dont le rayon sera représenté par  $\rho$ . Soient  $\alpha', \beta', \rho'$  les quantités analogues, relatives à la circonférence C'. Enfin, appelons  $x, y$  les coordonnées du point de contact M. Nous aurons :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (R + \rho)^2 \quad (1), & (d - \alpha)^2 + \beta^2 &= (R' + \rho)^2 \quad (2), \\ \alpha'^2 + \beta'^2 &= (R + \rho')^2 \quad (3), & (d - \alpha')^2 + \beta'^2 &= (R' + \rho')^2 \quad (4), \\ (\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 &= (\rho + \rho')^2 \quad (5), \\ \frac{x - \alpha}{\alpha' - \alpha} &= \frac{\rho}{\rho'} \quad (6), & \frac{y - \beta}{\beta' - \beta} &= \frac{\rho}{\rho'} \quad (7) \quad (2) \end{aligned}$$

Si, entre ces équations, nous éliminons  $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \rho$  et  $\rho'$ , nous obtiendrons l'équation du lieu cherché.

On satisfait aux équations (5), (6), (7) en prenant

$$x - \alpha = \rho \cos \varphi, \quad y - \beta = \rho \sin \varphi, \quad \alpha' - \alpha = \rho' \cos \varphi, \quad \beta' - \beta = \rho' \sin \varphi.$$

(1) Ce problème est proposé, comme exercice, dans la *Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, et dans le *Manuel des candidats à l'École polytechnique*. Plusieurs abonnés nous ont demandé que la *Nouvelle Correspondance* publiât les solutions de cette question et de quelques autres, réputées difficiles par les étudiants. La note actuelle est tirée de notre *Application de l'Algèbre à la Géométrie* (1848). Quant à la solution géométrique du problème, on peut consulter les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, 5<sup>e</sup> édit., p. 197.

(2) Ces équations supposent que les quatre cercles O, O', C, C' sont, deux à deux, extérieurs l'un à l'autre.

Au moyen de ces relations, dont la signification géométrique est visible, les équations (1), (2), (3), (4) deviennent :

$$x^2 + y^2 - 2\rho (x \cos \varphi + y \sin \varphi) = R^2 + 2R\rho,$$

$$d^2 - 2d (x - \rho \cos \varphi) = (R' - R) (R' + R + 2\rho),$$

$$x^2 + y^2 + 2\rho' (x \cos \varphi + y \sin \varphi) = R^2 + 2R\rho',$$

$$d^2 - 2d (x + \rho' \cos \varphi) = (R' - R) (R' + R + 2\rho').$$

Entre ces quatre équations, combinées deux à deux, éliminons  $\rho$  et  $\rho'$  ; nous obtiendrons, par un calcul facile :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 - R^2) (R' - R - d \cos \varphi) &= \\ (d^2 - 2dx + R^2 - R'^2) (R + x \cos \varphi + y \sin \varphi), \\ (x^2 + y^2 - R^2) (R' - R + d \cos \varphi) &= \\ (d^2 - 2dx + R^2 - R'^2) (R - x \cos \varphi - y \sin \varphi). \end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre, on trouve

$$(R' - R) (x^2 + y^2 - R^2) = R (d^2 - 2dx + R^2 - R'^2),$$

ou enfin

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{Rd}{R - R'} x + RR' + \frac{R}{R - R'} d^2 = 0. \quad (A)$$

Le lieu demandé est donc une circonférence ayant son centre I sur  $OO'$ , à une distance du centre O égale à  $\frac{Rd}{R - R'}$ . D'après cette valeur, le centre I est le point de concours des tangentes communes aux cercles donnés, extérieures à ces cercles. Quant au rayon  $l$  de la circonférence I, il est donné par la formule

$$l^2 = \left( \frac{Rd}{R - R'} - R \right) \left( \frac{R'd}{R - R'} + R' \right). \quad (B)$$

Soient A, A' les points où  $OO'$  coupe les circonférences données. Le premier facteur représente  $OI - OA = IA$  ; le second représente  $IA'$ . Donc le rayon IM est moyen proportionnel entre les distances IA, IA' (1).

(1) *Théorèmes et Problèmes*, p. 498.

REMARQUE. Les équations des cercles O, O' étant

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 (O), \quad (x-d)^2 + y^2 - R'^2 = 0 (O');$$

les cercles O, O', I, considérés deux à deux, ont trois axes radicaux, dont les équations sont, d'après la règle connue:

$$(O, O') \quad 2dx - d^2 - R^2 + R'^2 = 0,$$

$$(O, I) \quad -R^2 + 2 \frac{Rd}{R-R'} x - RR' - \frac{R}{R-R'} d^2 = 0,$$

$$(O', I) \quad -2dx + d^2 - R'^2 + 2 \frac{Rd}{R-R'} x - RR' - \frac{R}{R-R'} d^2 = 0.$$

En simplifiant les deux dernières, on retombe sur la première; donc, les trois axes radicaux coïncident; ou, ce qui est équivalent: les circonférences O, O', I, considérées deux à deux, ont les mêmes points d'intersection, réels ou imaginaires

E. C.

## THÉORÈMES SUR LES COURBES ET LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE;

par M. LOUIS SALTEL, professeur à Fontenay-le-Comte.

### 1. Théorèmes sur les courbes.

THÉORÈME I. Soient P un point arbitraire d'une courbe plane  $\Sigma$ , du troisième ordre, et PAB une sécante quelconque, issue de ce point et rencontrant la courbe aux points A, B. Représentons par (C, D, E), (C', D', E') six nouveaux points arbitraires de cette courbe, et considérons les deux coniques

$$(ABCDE), (ABC'D'E').$$

Si l'on désigne par  $\lambda, \lambda'$  les sixièmes points communs à ces coniques et à  $\Sigma$ , et par  $\alpha_1, \alpha_2$  les points communs à cette dernière courbe et à une sécante arbitraire, issue de P; ces deux points  $\alpha_1, \alpha_2$  sont les points homologues communs aux deux involutions que cette sécante détermine sur les deux quadrilatères

$$(CDE\lambda), (C'D'E'\lambda').$$