On aura :

$$10^{3p} - 1 = \mathrm{N} \times n,$$

et par conséquent :

$$111....1 = \frac{\mathrm{N}}{9} \times n.$$

Le nombre N, formé de la réunion de 3 périodes P, divisé par 9 et multiplié par n, donne donc un nombre formé d'une suite de 1.

6. Voici l'énoncé d'un théorème analogue et beaucoup plus général, dû à CRELLE (*Journal de Crelle*, t. 5, p. 296; *Annales de Gergonne*, t. 20, p. 349 et 304) : « *Un nombre donné quelconque est toujours diviseur d'un autre nombre exprimé par des périodes de chiffres donnés, suivies d'un certain nombre de zéros.* » Soit, par exemple, la période donnée 4813. Il n'est aucun nombre qui ne soit diviseur d'un nombre de la forme :

$$4813\ 4813....481348130000....0000,$$

pourvu qu'on y fasse varier, d'une manière convenable, le nombre des périodes et celui des zéros.

P. M.

REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\mathrm{I} = \int_0^\pi l\,(1-2a\cos x + a^2)\,dx.$

Les valeurs de I ont été trouvées par Poisson (*Journal de l'école polytechnique*, 9^e^ cahier, p. 617) ; mais ce grand géomètre a commis, dans sa démonstration, une singulière inadvertance :

« Soit » dit Poisson,

$$\text{« } u = \log\,(1-2a\cos x + a^2)\ ; \qquad (1$$

« d'où l'on tire :

$$\text{« } -a\frac{du}{da} = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2} - 1.$$

« Pour fixer les idées, supposons $a < 1$; nous aurons, en « série convergente,

$$\text{« } \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2} = 1 + a\cos x + a^2\cos 2x + a^3\cos 3x + \ldots$$

« . . . . »

Or, *la dernière égalité est fausse*. En effet, la multiplication par le diviseur donne, au lieu du premier membre, $1-a\cos x$.

On peut, comme il suit, rectifier le calcul de Poisson.

$$\frac{du}{da} = 2\frac{a-\cos x}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{2}{a}\frac{1-\frac{1}{a}\cos x}{1-\frac{2}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}}.$$

Si a *surpasse l'unité*, on a, par ce qui précède :

$$\frac{1-\frac{1}{a}\cos x}{1-\frac{2}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}} = 1+\frac{1}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}\cos 2x+\frac{1}{a^3}\cos 3x...$$

donc

$$\frac{du}{da} = 2\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\cos x+\frac{1}{a^3}\cos 2x+\frac{1}{a^4}\cos 3x+..\right];$$

puis :

$$u-\mathrm{C} = 2\left[la-\frac{1}{a}\cos x-\frac{1}{2a^2}\cos 2x-\frac{1}{3a^3}\cos 3x+..\right] \quad (2)$$

Pour déterminer la constante C, supposons $a = 1$; nous aurons :

$$u = l\,(2-2\cos x) = 2\,l\left(2\sin\frac{1}{2}x\right),$$

$$2l\left(2\sin\frac{1}{2}x\right)-\mathrm{C} = -2\left[\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+...\right]$$

Mais, par une formule connue (¹),

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+.. = -l\left(2\sin\frac{1}{2}x\right);$$

donc la constante C est nulle ; et l'on a :

$$\int_0^\pi u\,dx = \int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx = 2\pi la. \quad (a>1).$$

Le reste est facile.

E. Catalan.

(¹) *Traité élémentaire des séries*, p. 106.