Représentation d'intégrales stochastiques via la base de Haar

Céline ESSER
Celine.Esser@univ-lille1.fr

Université Lille 1 – Laboratoire Paul Painlevé

Journées de Probabilités 2016
23 – 27 Mai 2016

Travail en collaboration avec A. AYACHE (Université Lille 1)

Introduction

On s'intéresse à la simulation de l'intégrale stochastique

$$Y(t) := \int_0^t \sigma(s)\,\mathrm{d}X(s), \quad t \in I := [0,1]$$

Hypothèses générales.

- $\{\sigma(t)\}_{t\in I}$ dénote un processus Gaussien centré qui est, en moyenne quadratique, Hölder-continu d'ordre $\alpha_0 \in (0,1)$ i.e. $\exists c > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\left(|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)|^2\right) \leq c|t_1 - t_2|^{2\alpha_0} \quad \forall t_1, t_2 \in I$$

- $\{X(t)\}_{t\in I}$ dénote un processus Gaussien centré qui est, en moyenne quadratique, Hölder-continu d'ordre $\beta_0 \in (0,1)$
- $\alpha_0 + \beta_0 > 1$

$\longrightarrow$ Permet de donner du sens à l'intégrale trajectoire par trajectoire

Sous ces hypothèses, avec une probabilité 1, les trajectoires de $\{\sigma(t)\}_{t\in I}$ et $\{X(t)\}_{t\in I}$ appartiennent aux espaces de Hölder $C^\alpha(I)$ et $C^\beta(I)$ respectivement, pour tous $\alpha \in (0,\alpha_0)$, $\beta \in (0,\beta_0)$.

Défintion

Pour tout $\theta \in [0,1)$, l'espace de Hölder $C^\theta(I)$ est l'espace de Banach des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_{C^\theta(I)} := \|f\|_{I,\infty} + \sup_{(x_1,x_2)\in I^2,\, x_1<x_2} \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|^\theta} < +\infty.$$

Il existe donc des constantes aléatoires positives C_α et C_β telles que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$

$$|\sigma(t_1,\omega)-\sigma(t_2,\omega)| \leq C_\alpha(\omega)|t_1-t_2|^\alpha \quad \forall t_1,t_2 \in I$$

et

$$|X(t_1,\omega)-X(t_2,\omega)| \leq C_\beta(\omega)|t_1-t_2|^\beta \quad \forall t_1,t_2 \in I$$

Soient $\sigma(\cdot,\omega)$ et $X(\cdot,\omega)$ deux trajectoires typiques de $\{\sigma(t)\}_{t\in I}$ et $\{X(t)\}_{t\in I}$. Les conditions de Hölder donnent l'existence de $\zeta_t(\omega)\in\mathbb{R}$ tel que pour toute suite

$$(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}=\Big(\big\{\delta_0^n,\delta_1^n,\ldots,\delta_{r_n}^n\ :\ r_n\in\mathbb{N},\ 0=\delta_0^n<\delta_1^n<\ldots<\delta_{r_n}^n=t\big\}\Big)_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

de partitions de l'intervalle I telle que

$$|\mathcal{D}_n|:=\max_{1\leq i\leq r_n}\left(\delta_i^n-\delta_{i-1}^n\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$

la somme de Riemann-Stieltjes

$$\sum_{i=1}^{r_n}\sigma(\delta_{i-1}^n,\omega)\big(X(\delta_i^n,\omega)-X(\delta_{i-1}^n,\omega)\big)$$

converge vers $\zeta_t(\omega)$. On peut donc définir l'intégrale $\int_0^t\sigma(s,\omega)\,\mathrm{d}X(s,\omega)$ en posant

$$\boxed{\int_0^t\sigma(s,\omega)\,\mathrm{d}X(s,\omega):=\zeta_t(\omega).}$$

Young - Loeve

Soient $f \in C^{\alpha}(I)$ et $g \in C^{\beta}(I)$ avec $\alpha, \beta \in (0,1)$ tels que $\alpha + \beta > 1$. Il existe une constante $\mathcal{K}_{\alpha+\beta} > 0$ telle que

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(s)\,\mathrm{d}g(s) - f(t_1)\big(g(t_2) - g(t_1)\big) \right| \leq \mathcal{K}_{\alpha+\beta} \|f\|_{C^{\alpha}([t_1,t_2])} \|g\|_{C^{\beta}([t_1,t_2])} (t_2 - t_1)^{\alpha+\beta}$$

pour tous $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$.

En particulier, la fonction

$$t \to \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}g(s)$$

appartient à l'espace de Hölder $C^{\beta}(I)$.

Remarque. Les fonctions f et g peuvent être vues comme des trajectoires typiques des processus $\{\sigma(t)\}_{t \in I}$ et $\{X(t)\}_{t \in I}$. Donc avec une probabilité 1, les trajectoires de $\{Y(t)\}_{t \in I}$ appartiennent à $C^{\beta}(I)$.

Première partie. On va supposer que σ et X sont des fonctions déterministes de $C^\alpha(I)$ et $C^\beta(I)$ respectivement

- Approximation via les sommes de Riemann
- Approximation via la base de Haar

Deuxième partie. On va supposer que σ et X sont des processus Gaussiens indépendants dont les trajectoires typiques appartiennent à $C^\alpha(I)$ et $C^\beta(I)$ respectivement.

- Hypothèses sur les incréments d'ordre 2 et amélioration de la vitesse de convergence

Première partie. On va supposer que σ et X sont des fonctions déterministes de $C^{\alpha}(I)$ et $C^{\beta}(I)$ respectivement

- Approximation via les sommes de Riemann
- Approximation via la base de Haar

Deuxième partie. On va supposer que σ et X sont des processus Gaussiens indépendants dont les trajectoires typiques appartiennent à $C^{\alpha}(I)$ et $C^{\beta}(I)$ respectivement.

- Hypothèses sur les incréments d'ordre 2 et amélioration de la vitesse de convergence

Approximation via les sommes de Riemann

Pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}$, on va approcher

$$Y\left(\frac{k}{2^j}\right) = \int_0^{\frac{k}{2^j}} \sigma(s)dX(s) = \sum_{l=0}^{k-1} \int_{\frac{l}{2^j}}^{\frac{l+1}{2^j}} \sigma(s)dX(s)$$

par

$$Y_j\left(\frac{k}{2^j}\right) := \sum_{l=0}^{k-1} \sigma\left(\frac{l}{2^j}\right) \underbrace{\left(X\left(\frac{l+1}{2^j}\right) - X\left(\frac{l}{2^j}\right)\right)}_{:=\Delta_{j,l}(X) \text{ incréments d'ordre 1 de } X}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \left|Y\left(\frac{k}{2^j}\right) - Y_j\left(\frac{k}{2^j}\right)\right| &\leq \sum_{l=0}^{k-1} \left|\int_{\frac{l}{2^j}}^{\frac{l+1}{2^j}} \sigma(s)dX(s) - \sigma\left(\frac{l}{2^j}\right)\Delta_{j,l}(X)\right| \\ &\leq \sum_{l=0}^{k-1} c_0 2^{-j(\alpha+\beta)} \leq c_0 2^{-j(\alpha+\beta-1)} \end{aligned}$$

Par linéarisation, on obtient pour tout $j \in \mathbb{N}$, une approximation Y_j^{RS} de Y :

$$\boxed{Y_j^{RS}(t) := (2^j t - [2^j t])\sigma\left(\frac{[2^j t]}{2^j}\right)\Delta_{j,[2^j t]}(X) + Y_j\left(\frac{[2^j t]}{2^j}\right)}$$

Proposition

Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|Y - Y_j^{RS}\|_\infty \leq c2^{-j(\alpha+\beta-1)} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Remarque. Dans le cas de l'espace $C^\gamma(I)$ avec $\gamma \in [0, \beta)$, on obtient

$$\|Y - Y_j^{RS}\|_\infty \leq c2^{-j\min(\beta-\gamma,\alpha+\beta-1)} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

et le résultat est optimal si $\gamma \in [1-\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, où $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont les exposants de Hölder uniformes de σ et X.

Approximation via la base de Haar

Alternative. Remplacer $\sigma\left(\frac{l}{2^j}\right)$ par une moyenne sur l'intervalle dyadique

$$\overline{\sigma}_{j,l} := 2^j \int_{\frac{l}{2^j}}^{\frac{l+1}{2^j}} \sigma(s)\,\mathrm{d}s$$

On propose donc une approximation Y_j^H de Y :

$$\boxed{Y_j^H(t) := \sum_{l=0}^{[2^j t]-1} \overline{\sigma}_{j,l}\Delta_{j,l}(X) + \left(2^j \int_{\frac{[2^j t]}{2^j}}^{t} \sigma(s)\,\mathrm{d}s\right)\Delta_{j,[2^j t]}(X)}$$

Si on pose $\mathcal{L} := \mathbf{1}_{[0,1)}$, cela revient à définir

$$Y_j^H(t) = \sum_{l=0}^{2^j-1} b_{j,l}(t)\Delta_{j,l}(X)$$

où

$$b_{j,l}(t) := 2^j \int_0^t \sigma(s)\mathcal{L}(2^j s - l)\,\mathrm{d}s$$

Théorème

Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|Y - Y_j^H\|_\infty \leq c 2^{-j(\alpha+\beta-1)} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Idée. On a

$$\begin{aligned}
& \Big| \int_{2^{-j}l}^{2^{-j}(l+1)} \sigma(s)\,\mathrm{d}X(s) - \overline{\sigma}_{j,l}\Delta_{j,l}(X) \Big| \\
= & \Big| \int_{2^{-j}l}^{2^{-j}(l+1)} \big(\sigma(s) - \overline{\sigma}_{j,l}\big)\,\mathrm{d}X(s) \Big| \\
= & \Big| \int_{2^{-j}l}^{2^{-j}(l+1)} \big(\sigma(s) - \overline{\sigma}_{j,l}\big)\,\mathrm{d}X(s) - \big(\sigma(2^{-j}l) - \overline{\sigma}_{j,l}\big)\Delta_{j,l}(X) \Big| \\
& \qquad + \Big| \big(\sigma(2^{-j}l) - \overline{\sigma}_{j,l}\big)\Delta_{j,l}(X) \Big| \\
\leq & \; c_1 2^{-j(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de la moyenne pour estimer $\big|\sigma(2^{-j}l) - \overline{\sigma}_{j,l}\big|$

Lien avec la base de Haar

La base de Haar est la base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ formée par les fonctions

$$\begin{cases} x \mapsto \mathcal{L}(x-k), & k \in \mathbb{Z} \\ x \mapsto 2^{j/2}\mathcal{H}(2^j x - k), & j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

où $\mathcal{L} := \mathbf{1}_{[0,1)}$ et $\mathcal{H} := \mathbf{1}_{[0,1/2)} - \mathbf{1}_{[1/2,1)}$. Pour tout $t \in I$ fixé, la fonction

$$s \mapsto \sigma_t(s) := \sigma(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$$

peut s'exprimer comme

$$\sigma_t(\cdot) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} b_{0,l}(t)\mathcal{L}(\cdot - l) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j,k}(t)\mathcal{H}(2^j \cdot - k)$$

où la convergence a lieu dans $L^2(\mathbb{R})$, avec

$$b_{0,l}(t) := \int_0^t \sigma(s)\mathcal{L}(s-l)\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad a_{j,k}(t) := 2^j \int_0^t \sigma(s)\mathcal{H}(2^j s - k)\,\mathrm{d}s$$

Lien avec la base de Haar

La base de Haar est la base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ formée par les fonctions

$$\begin{cases} x \mapsto \mathcal{L}(x-k), \quad k \in \mathbb{Z} \\ x \mapsto 2^{j/2}\mathcal{H}(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

où $\mathcal{L} := \mathbf{1}_{[0,1)}$ et $\mathcal{H} := \mathbf{1}_{[0,1/2)} - \mathbf{1}_{[1/2,1)}$. Pour tout $t \in I$ fixé, la fonction

$$s \mapsto \sigma_t(s) := \sigma(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$$

peut s'exprimer comme

$$\sigma_t(\cdot) = b_{0,0}(t)\mathcal{L}(\cdot) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\mathcal{H}(2^j \cdot -k)$$

où la convergence a lieu dans $L^2(\mathbb{R})$, avec

$$b_{0,l}(t) := \int_0^t \sigma(s)\mathcal{L}(s-l)\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad a_{j,k}(t) := 2^j \int_0^t \sigma(s)\mathcal{H}(2^j s - k)\,\mathrm{d}s$$

$$\boxed{\sigma_t(\cdot) = b_{0,0}(t)\mathcal{L}(\cdot) + \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\mathcal{H}(2^j\cdot -k)}$$

Pour tout $J \in \mathbb{N}$, on considère les sommes partielles

$$\begin{aligned}\sigma_{t,J}(\cdot) &:= b_{0,0}(t)\mathcal{L}(\cdot) + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\mathcal{H}(2^j\cdot -k)\\ &= \sum_{l=0}^{2^J-1} b_{J,l}(t)\mathcal{L}(2^J\cdot -l)\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sigma_{t,J}(s)\,\mathrm{d}X(s) &= \sum_{l=0}^{2^J-1} b_{J,l}(t)\int_0^1 \mathcal{L}(2^J s - l)\,\mathrm{d}X(s)\\ &= \sum_{l=0}^{2^J-1} b_{J,l}(t)\Delta_{J,l}(X) = Y_J^H(t)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_t(\cdot) = b_{0,0}(t)\mathcal{L}(\cdot) + \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\mathcal{H}(2^j\cdot - k)}$$

Pour tout $J \in \mathbb{N}$, on considère les sommes partielles

$$\begin{aligned}
\sigma_{t,J}(\cdot) &:= b_{0,0}(t)\mathcal{L}(\cdot) + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\mathcal{H}(2^j\cdot - k)\\
&= \sum_{l=0}^{2^J-1} b_{J,l}(t)\mathcal{L}(2^J\cdot - l)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sigma_{t,J}(s)\,\mathrm{d}X(s) &= \sum_{l=0}^{2^J-1} b_{J,l}(t)\int_0^1 \mathcal{L}(2^J s - l)\,\mathrm{d}X(s)\\
&= \sum_{l=0}^{2^J-1} b_{J,l}(t)\Delta_{J,l}(X) = Y_J^H(t)
\end{aligned}$$

Autre point de vue : Travailler avec les incréments d'ordre 2

$$
\begin{aligned}
Y_J^H(t) &= \int_0^1 \sigma_{t,J}(s)\,\mathrm{d}X(s) \\
&= \int_0^1 \left(b_{0,0}(t)\mathcal{L}(s) + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\mathcal{H}(2^j s - k) \right) \mathrm{d}X(s) \\
&= b_{0,0}(t)\int_0^1 \mathcal{L}(s)\,\mathrm{d}X(s) + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\int_0^1 \mathcal{H}(2^j s - k)\,\mathrm{d}X(s) \\
&= b_{0,0}(t)\Delta_{0,0}(X) + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\Delta^2_{j,k}(X)
\end{aligned}
$$

où les incréments d'ordre 2 de X sont définis par

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\Delta^2_{j,k}(X) &:= \Delta_{j+1,2k}(X) - \Delta_{j+1,2k+1}(X) \\
&= 2X\left(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\right) - X\left(\frac{k}{2^j}\right) - X\left(\frac{k+1}{2^j}\right)
\end{aligned}
}
$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$Z_j(t) := \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\Delta^2_{j,k}(X)$$

Ainsi

$$\|Y - Y_J^H\|_\infty = \|\sum_{j=J}^{+\infty} Z_j\|_\infty \leq \sum_{j=J}^{+\infty} \|Z_j\|_\infty$$

Afin d'avoir une vitesse de convergence de Y_j^H vers Y, il faut donc estimer $\|Z_j\|_\infty$. On peut en fait se ramener à une estimation de Z_j sur les nombres dyadiques :

Lemme

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{t\in[0,1]} |Z_j(t)| - \sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}} |Z_j(2^{-j}l)| \leq C2^{-j\beta} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Lemme

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{t\in[0,1]} |Z_j(t)| - \sup_{l\in\{0,\dots,2^j-1\}} |Z_j(2^{-j}l)| \leq C2^{-j\beta} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Preuve. Comme Z_j est continu sur $[0,1]$, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que

$$\sup_{t\in[0,1]} |Z_j(t)| = |Z_j(t_0)|.$$

Posons $l_0 := [2^j t_0]$. Alors

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} |Z_j(t)| - \sup_{l\in\{0,\dots,2^j-1\}} |Z_j(2^{-j}l)| &\leq |Z_j(t_0)| - |Z_j(2^{-j}l_0)| \\
&\leq \left|Z_j(t_0) - Z_j(2^{-j}l_0)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{2^j-1} \left|a_{j,k}(t_0) - a_{j,k}(2^{-j}l_0)\right| \left|\Delta^2_{j,k}(X)\right| \\
&= \left|a_{j,l_0}(t_0)\Delta^2_{j,l_0}(X)\right|
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\left|a_{j,l_0}(t_0)\right| &= 2^j\left|\int_{2^{-j}l_0}^{t_0}\sigma(s)\mathcal{H}(2^js-k)ds\right|\\ &\leq 2^j(t_0-l_02^{-j})\|\sigma\|_\infty \leq \|\sigma\|_\infty\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\Delta^2_{j,l_0}(X)\right| &= \left|2X\left(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\right)-X\left(\frac{k}{2^j}\right)-X\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right|\\ &\leq \left|X\left(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\right)-X\left(\frac{k}{2^j}\right)\right|+\left|X\left(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\right)-X\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right|\\ &\leq C2^{-\beta j}\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\sup_{t\in[0,1]}|Z_j(t)| - \sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}}|Z_j(2^{-j}l)| \leq C'2^{-\beta j}$$

$\square$

Retour aux processus stochastiques

Hypothèses générales.

- σ est une fonction de $C^\alpha(I)$
- $\{X(t)\}_{t\in I}$ dénote un processus Gaussien centré qui est, en moyenne quadratique, Hölder-continu d'ordre $\beta_0 \in (0,1)$
- $\alpha + \beta_0 > 1$

Hypothèse ($\mathcal{H}$) sur les incréments d'ordre 2 du processus X : il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\boxed{\max_{k_1\in\{0,\dots,2^j-1\}} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \left|\mathrm{Cov}\left[\Delta^2_{j,k_1}(X), \Delta^2_{j,k_2}(X)\right]\right| \leq c2^{-2j\beta_0} \quad \forall j \in \mathbb{N}}$$

Cette hypothèse permet d'améliorer la vitesse de convergence : pour tout $\beta \in (0,\beta_0)$, il existe une variable aléatoire positive C telle que

$$\boxed{\|Y - Y_J^H\|_\infty \leq C2^{-J\min(\beta,\alpha+\beta-\frac{1}{2})} \quad \forall J \in \mathbb{N}}$$

Posons

$$\xi_j := \sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}} |Z_j(2^{-j}l)|.$$

Fixons $\beta_1 \in (\beta, \beta_0)$. On va montrer que

$$s := \sup_{j\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{E}\left[\xi_j 2^{j\min(\beta_1,\alpha+\beta_1-1/2)}\right]\right) < +\infty.$$

Dans ce cas, on aura

$$\mathbb{P}[\{\xi_j 2^{j\min(\beta,\alpha+\beta-1/2)} > s\}] \leq \mathbb{E}\left[\frac{\xi_j 2^{j\min(\beta,\alpha+\beta-1/2)}}{s}\right] \leq 2^{(\beta-\beta_1)j}$$

d'où

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[\{\xi_j 2^{j\min(\beta,\alpha+\beta-1/2)} > s\}] < +\infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, cela donnera qu'avec une probabilité 1,

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left(\xi_j 2^{j\min(\beta,\alpha+\beta-1/2)}\right) < +\infty.$$

Lemme

Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un processus Gaussien centré. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $N \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{1\leq n\leq N} |g_n|\right] \leq c(1+\log_2 N)^{\frac{1}{2}} \sup_{1\leq n\leq N} \mathbb{E}\left[|g_n|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le processus $Z_j(t) = \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\Delta^2_{j,k}(X)$ est Gaussien et centré. Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}} |Z_j(2^{-j}l)|\right] \leq c_0\sqrt{1+j} \sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}} \mathbb{E}\left[|Z_j(2^{-j}l)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

et le problème se ramène donc au calcul de $\mathbb{E}\left[|Z_j(2^{-j}l)|^2\right]$. On a

$$\mathbb{E}\left[|Z_j(2^{-j}l)|^2\right] = \sum_{k_1=0}^{2^j-1}\sum_{k_2=0}^{2^j-1} a_{j,k_1}(2^{-j}l)a_{j,k_2}(2^{-j}l)\mathrm{Cov}\left[\Delta^2_{j,k_1}(X)\Delta^2_{j,k_2}(X)\right]$$

Remarquons que $a_{j,k}(2^{-j}l) = 0$ si $l \leq k$, et si $l \geq k+1$

$$
\begin{aligned}
a_{j,k}(2^{-j}l) &= 2^j \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} \sigma(s)\mathcal{H}(2^j s - k)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \sigma\left(2^{-j}(u+k)\right)\mathcal{H}(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \left(\sigma\left(2^{-j}(u+k)\right) - \sigma\left(2^{-j}k\right)\right)\mathcal{H}(u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Comme σ est Hölder-continu d'ordre α,

$$
\begin{aligned}
|a_{j,k}(t)| &\leq \left\|\sigma\left(2^{-j}(\cdot+k)\right) - \sigma\left(2^{-j}k\right)\right\|_\infty \int_0^1 |\mathcal{H}(u)|\,\mathrm{d}(u) \\
&\leq C_\alpha 2^{-j\alpha}
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Z_j(2^{-j}l)|^2\right] &= \sum_{k_1=0}^{2^j-1}\sum_{k_2=0}^{2^j-1} a_{j,k_1}(2^{-j}l)a_{j,k_2}(2^{-j}l)\mathrm{Cov}\left[\Delta^2_{j,k_1}(X)\Delta^2_{j,k_2}(X)\right] \\
&\leq C_\alpha^2 2^{-2\alpha j}2^j \underbrace{\max_{k_1\in\{0,\ldots,2^j-1\}}\sum_{k_2=0}^{2^j-1}\left|\mathrm{Cov}\left[\Delta^2_{j,k_1}(X),\Delta^2_{j,k_2}(X)\right]\right|}_{\leq c2^{-2j\beta_0}\text{ vu }(\mathcal{H})} \\
&\leq \widetilde{C}2^{-j(2\alpha+2\beta_0-1)}
\end{aligned}$$

On en tire que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}}|Z_j(2^{-j}l)|\right] \leq c_0\sqrt{1+j}\sqrt{\widetilde{C}}2^{-j(\alpha+\beta_0-1/2)} \leq C2^{-j(\alpha+\beta_1-1/2)}$$

Total. On a montré que $\mathbb{E}\left[\sup_{l\in\{0,\dots,2^j-1\}}|Z_j(2^{-j}l)|\right] \leq C2^{-j(\alpha+\beta_1-1/2)}$. Par conséquent, le lemme de Borel-Cantelli donne qu'avec une probabilité 1

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{l\in\{0,\dots,2^j-1\}}|Z_j(2^{-j}l)|2^{j\min(\beta,\alpha+\beta-1/2)}\Big) < +\infty.$$

Vu le lemme, on a

$$\sup_{t\in[0,1]}|Z_j(t)| \leq \sup_{l\in\{0,\dots,2^j-1\}}|Z_j(2^{-j}l)| + C2^{-\beta j}$$

d'où le résultat suivant :

Théorème

Il existe une constante aléatoire positive $\widetilde{C}$ telle que, avec une probabilité 1,

$$\|Y - Y_j^H\|_\infty \leq \widetilde{C}2^{-j\min(\beta,\alpha+\beta-1/2)} \quad \forall j\in\mathbb{N}.$$

Hypothèse ($\mathcal{H}$) sur la covariance des incréments d'ordre 2

$$\boxed{\max_{k_1\in\{0,\ldots,2^j-1\}} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \left|\mathrm{Cov}\left[\Delta^2_{j,k_1}(X), \Delta^2_{j,k_2}(X)\right]\right| \leq c2^{-2j\beta_0} \quad \forall j \in \mathbb{N}}$$

Cette condition est satisfaite s'il existe $c > 0$ et $\kappa > 1$ tels que

$$\left|\mathrm{Cov}\left[\Delta^2_{j,k_1}(X), \Delta^2_{j,k_2}(X)\right]\right| \leq c2^{-2j\beta_0}(1 + |k_1 - k_2|)^{-\kappa}$$

pour tous $j \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}$.

- Le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $\beta_0 \in (0, 1)$ satisfait ($\mathcal{H}$)
- Le processus $X(t) := \int_{\mathbb{R}}(e^{it\xi} - 1)\sqrt{f(\xi)}\,\mathrm{d}\widehat{W}(\xi)$ (où $f \geq 0$, f paire et $\xi \to (e^{it\xi} - 1)\sqrt{f(\xi)} \in L^2(\mathbb{R})$) satisfait ($\mathcal{H}$) si

$$\sum_{k_2=0}^{2^j-1} 2^j \left|\int_{\mathbb{R}} \sin^4\left(\frac{\eta}{4}\right) f(2^j\eta)e^{i\eta(k_1-k_2)}\,\mathrm{d}\eta\right| \leq c2^{-2j\beta_0}$$

Cas où σ est aléatoire

Hypothèses générales.

- $\{\sigma(t)\}_{t\in I}$ dénote un processus Gaussien centré qui est, en moyenne quadratique, Hölder-continu d'ordre $\alpha_0 \in (0,1)$, et dont les accroissements sont indépendants
- $\{X(t)\}_{t\in I}$ dénote un processus Gaussien centré qui est, en moyenne quadratique, Hölder-continu d'ordre $\beta_0 \in (0,1)$ qui satisfait l'hypothèse ($\mathcal{H}$)
- $\alpha_0 + \beta_0 > 1$
- $\{\sigma(t)\}_{t\in I}$ et $\{X(t)\}_{t\in I}$ sont indépendants

Rappelons qu'il suffit de montrer que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{E}\left[\sup_{l\in\{0,\dots,2^j-1\}} |Z_j(2^{-j}l)| 2^{j\min(\beta_1,\alpha+\beta_1-1/2)} \right] \right) < +\infty$$

où $\beta_1 \in (\beta, \beta_0)$ et $Z_j(t) := \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(t)\Delta^2_{j,k}(X)$

Problème. Dans ce cas, le processus $\{Z_j(t)\}_{t\in I}$ n'est plus Gaussien.

But. Estimer $\mathbb{E}\left[\sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}}|Z_j(2^{-j}l)|\right]$ pour pouvoir appliquer Borel-Cantelli.

Soit $\mathcal{G}_j$ la sigma-algèbre engendrée par les coefficients $b_{j,k}$, $k \in \{0,\ldots,2^j-1\}$, où

$$b_{j,k} = 2^j \int_0^1 \sigma(s)\mathcal{L}(2^j s - l)\,\mathrm{d}s$$

Comme X est un processus Gaussien indépendant de σ, conditionnellement à $\mathcal{G}_j$, le processus $\{Z_j(t)\}_{t\in I}$ est Gaussien et centré. Donc

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}}|Z_j(2^{-j}l)|\Big|\mathcal{G}_j\Big] \le c_0\sqrt{1+j}\sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}}\mathbb{E}\left[|Z_j(2^{-j}l)|^2\middle|\mathcal{G}_j\right]^{\frac{1}{2}}$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}}|Z_j(2^{-j}l)|\Big] &\le c_0\sqrt{1+j}\,\mathbb{E}\left[\sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}}\mathbb{E}\left[|Z_j(2^{-j}l)|^2\middle|\mathcal{G}_j\right]^{\frac{1}{2}}\right]\\ &\le c_0\sqrt{1+j}\,\mathbb{E}\left[\sup_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}}\mathbb{E}\left[|Z_j(2^{-j}l)|^2\middle|\mathcal{G}_j\right]^2\right]^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

Posons

$$\theta_j^l := \mathbb{E}\left[\left|Z_j(2^{-j}l)\right|^2 \middle| \mathcal{G}_j\right]$$

Lemme

$(\theta_l^j)_{l\in\{0,\ldots,2^j-1\}}$ est une sous-martingale.

Preuve. Pour tout $l \in \{0,\ldots,2^j-1\}$, soit $\mathcal{G}_j^l$ la sigma-algèbre engendrée par les coefficients $b_{j,k}$, $k \in \{0,\ldots,l-1\}$. Comme X est indépendant de σ, on a

$$\begin{aligned}
\theta_j^l &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{l-1} b_{j,k}\Delta_{j,k}^2(X)\right)^2 \middle| \mathcal{G}_j\right] \\
&= \sum_{k_1=0}^{l-1}\sum_{k_2=0}^{l-1} b_{j,k_1}b_{j,k_2}\mathbb{E}\left[\Delta_{j,k_1}^2(X)\Delta_{j,k_2}^2(X)\right]
\end{aligned}$$

Par conséquent, θ_j^l est $\mathcal{G}_j^l$-mesurable.

On a

$$\theta_j^{l+1} = \theta_j^l + 2\sum_{k_2=0}^{l-1} b_{j,l}b_{j,k_2}\mathbb{E}\left[\Delta_{j,l}^2(X)\Delta_{j,k_2}^2(X)\right] + b_{j,l}^2\mathbb{E}\left[(\Delta_{j,l}^2(X))^2\right]$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\theta_j^{l+1}\middle|\mathcal{G}_j^l\right] &= \mathbb{E}\left[\theta_j^l\middle|\mathcal{G}_j^l\right] + 2\sum_{k_2=0}^{l-1}\mathbb{E}\left[b_{j,l}b_{j,k_2}\middle|\mathcal{G}_j^l\right]\mathbb{E}\left[\Delta_{j,k_1}^2(X)\Delta_{j,k_2}^2(X)\right] \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}\left[b_{j,l}^2\middle|\mathcal{G}_j^l\right]\mathbb{E}\left[(\Delta_{j,l}^2(X))^2\right]}_{\geq 0} \\ &\geq \theta_j^l + 2\sum_{k_2=0}^{l-1} b_{j,k_2}\underbrace{\mathbb{E}\left[b_{j,l}\middle|\mathcal{G}_j^l\right]}_{=\mathbb{E}[b_{j,l}]=0}\mathbb{E}\left[\Delta_{j,k_1}^2(X)\Delta_{j,k_2}^2(X)\right] = \theta_j^l\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que σ est centré et à accroissements stationnaires. □

Par conséquent, on peut appliquer l'inégalité maximale de Doob pour les sous-martingales positives :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{l\in\{0,\dots,2^j-1\}} \mathbb{E}\left[|Z_j(2^{-j}l)|^2 \middle| \mathcal{G}_j\right]^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{l\in\{0,\dots,2^j-1\}} (\theta_j^l)^2\right] \\ &\leq 4\,\mathbb{E}\left[(\theta_j^{2^j-1})^2\right]\end{aligned}$$

et il reste à estimer

$$\mathbb{E}\left[(\theta_j^{2^j-1})^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k_1=0}^{2^j-1}\sum_{k_2=0}^{2^j-1} b_{j,k_1}b_{j,k_2}\mathbb{E}\left[\Delta_{j,k_1}^2(X)\Delta_{j,k_2}^2(X)\right]\right)^2\right]$$

$$= \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} \mathbb{E}\left[b_{j,k_1}b_{j,k_2}b_{j,k_3}b_{j,k_4}\right]\mathbb{E}\left[\Delta_{j,k_1}^2(X)\Delta_{j,k_2}^2(X)\right]\mathbb{E}\left[\Delta_{j,k_3}^2(X)\Delta_{j,k_4}^2(X)\right]$$

On arrive à la conclusion en utilisant l'indépendance des $b_{j,k}$ (car les accroissements de σ sont indépendants), le fait que $\mathbb{E}\left[b_{j,k}\right] = 0$ (car σ est centré), la continuité Höldérienne de σ et l'hypothèse $(\mathcal{H})$.