Analyse multifractale de la vitesse de divergence de séries d'ondelettes

Céline ESSER
Celine.Esser@univ-lille1.fr

Université Lille 1 – Laboratoire Paul Painlevé

Séminaire de Vannes du LMBA
13 mai 2016

Travail en collaboration avec S. JAFFARD (Université Paris Est - Créteil)

Introduction

Notons $\mathbb{T} = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ et considérons une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$. On s'intéresse aux sommes partielles trigonométriques de Fourier

$$S_n f : x \to \sum_{k=-n}^{n} < f, e_k > e_k(x)$$

où

$$e_k : x \to e^{2i\pi kx}$$

Questions.

- A-t-on la convergence ponctuelle de $S_n f$ vers f sur $\mathbb{T}$?
- Peut-on dire quelque chose sur la taille de l'ensemble des points x pour lesquels $S_n f(x)$ diverge ?

- Du Bois-Reymond (1873) : Il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tel que $S_n f(x)$ diverge en un x.
- Kolmogorov (1926) : Il existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $S_n f(x)$ diverge en tout x.
- Kahane et Katznelson (1966) : Si $A \subseteq \mathbb{T}$ est un F_σ de mesure de Lebesgue nulle, il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tel que $S_n f(x)$ diverge en tout $x \in A$.
- Carleson et Hunt (1967) : Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ $(1 < p < +\infty)$, $S_n f$ converge presque partout.

- Du Bois-Reymond (1873) : Il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tel que $S_n f(x)$ diverge en un x.
- Kolmogorov (1926) : Il existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $S_n f(x)$ diverge en tout x.
- Kahane et Katznelson (1966) : Si $A \subseteq \mathbb{T}$ est un F_σ de mesure de Lebesgue nulle, il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tel que $S_n f(x)$ diverge en tout $x \in A$.
- Carleson et Hunt (1967) : Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ $(1 < p < +\infty)$, $S_n f$ converge presque partout.

$\longrightarrow$ En dehors de cet ensemble, vitesse de divergence de $S_n f(x)$?

Inégalité de Nikolsky. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors

$$\|S_n f\|_\infty \leq C_p n^{1/p} \|f\|_p$$

Question.
Si $\beta \in [0, 1/p]$, que peut-on dire sur la taille de l'ensemble $\left\{x : |S_n f(x)| \approx n^\beta\right\}$?

Dimension de Hausdorff

Soit $B \subseteq \mathbb{R}$ et $s > 0$. On pose

$$\mathcal{H}^s_\delta(B) := \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_j)^s \ : \ (B_j)_{j \in \mathbb{N}} \ \delta - \text{recouvrement de } B \right\}.$$

et on définit la mesure extérieure de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ par

$$\mathcal{H}^s(B) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(B) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

Dimension de Hausdorff

Soit $B \subseteq \mathbb{R}$ et $s > 0$. On pose

$$\mathcal{H}^s_\delta(B) := \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_j)^s \;:\; (B_j)_{j\in\mathbb{N}} \;\; \delta - \text{recouvrement de } B \right\}.$$

et on définit la mesure extérieure de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ par

$$\mathcal{H}^s(B) := \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(B) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

On peut montrer qu'il existe une valeur critique pour laquelle $s \mapsto \mathcal{H}^s(B)$ “saute” de l'infini à 0. La dimension de Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}(B)$ de B est définie par

$$\boxed{\dim_{\mathcal{H}}(B) := \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(B) = \infty\}}$$

Divergence des séries de Fourier dans $L^p(\mathbb{T})$

Pour tout $\beta \in [0, 1/p]$, on considère l'ensemble

$$\mathcal{E}(\beta, f) := \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} n^{-\beta} |S_n f(x)| > 0 \right\}$$

Aubry (2006)

Si $1 < p < +\infty$ et si $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors

$$\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{E}(\beta, f) \leq 1 - \beta p, \quad \forall \beta \in [0, 1/p].$$

De plus, si $\beta \in [0, 1/p]$ est fixé, ce résultat est optimal : Étant donné un ensemble E tel que $\dim_{\mathcal{H}} E < 1 - \beta p$, il existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-\beta} |S_n f(x)| = +\infty \quad \forall x \in E.$$

- Indice de divergence au point x :

$$\beta_f(x) := \sup\left\{\beta \geq 0 : x \in \mathcal{E}(\beta, f)\right\} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log n}$$

- Ensembles de niveau : $E(\beta, f) := \left\{x : \beta_f(x) = \beta\right\}$
- Spectre multifractal de la divergence : $\beta \to \dim_{\mathcal{H}} E(\beta, f)$

- Indice de divergence au point x :

$$\beta_f(x) := \sup\left\{\beta \geq 0 : x \in \mathcal{E}(\beta, f)\right\} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|S_n f(x)|}{\log n}$$

- Ensembles de niveau : $E(\beta, f) := \left\{x : \beta_f(x) = \beta\right\}$
- Spectre multifractal de la divergence : $\beta \to \dim_{\mathcal{H}} E(\beta, f)$

Bayart, Heurteaux (2011)

Quasi-toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ satisfait

$$\dim_{\mathcal{H}} E(\beta, f) = 1 - \beta p, \quad \forall \beta \in [0, 1/p].$$

Remarques.

- “Quasi-toute fonction” signifie que la propriété est vraie sur une intersection dénombrable d’ouverts denses (Baire category theorem).
- Pour ces fonctions, on a en particulier $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{E}(\beta, f) = 1 - \beta p$, $\forall \beta \in [0, 1/p]$.

Séries d'ondelettes

La série de Fourier d'une fonction continue peut diverger en certains points. Cette propriété est-elle inhérente à toute décomposition orthogonale ?

Base de Haar (1910). Dans cette base othonormée de $L^2(\mathbb{R})$, les sommes partielles de la décomposition de toute fonction continue convergent uniformément sur tout compact.
Cette base est composée des fonctions

$$\begin{cases} \varphi_k : x \mapsto \varphi(x-k), & k \in \mathbb{Z} \\ \psi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2}\psi(2^j x - k), & j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

où $\varphi = \mathbf{1}_{[0,1[}$ et $\psi = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}[} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1[}$

$\longrightarrow$ Prototype des bases d'ondelettes. Convergence uniforme sur tout compact de l'expansion de toute fonction continue (Walter 1995)

Divergence de séries d'ondelettes

Base d'ondelette de $L^2(\mathbb{R})$. Base orthonormée de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_k : x \mapsto \varphi(x-k), & k \in \mathbb{Z} \\ \psi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2}\psi(2^j x - k), & j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Choix des ondelettes. L'ondelette mère ψ est

- bien localisée : ψ est à décroissance rapide, i.e. pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que
$$|\psi(x)| \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
- oscillante : il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que
$$\int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x) dx = 0 \quad \forall m \in \{0, \ldots, M-1\}.$$

On s'intéresse à la convergence ponctuelle du développement en ondelettes de f

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} < f,\varphi_k > \varphi_k(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} < f,\psi_{j,k} > \psi_{j,k}(x)$$

Remarque. Contrairement aux séries de Fourier, il n'y a pas d'"ordre naturel" pour les ondelettes. Par conséquent, la notion de convergence poncuelle n'a pas une définition aussi naturelle.

On s'intéresse à la convergence ponctuelle du développement en ondelettes de f

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} < f,\varphi_k > \varphi_k(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} < f,\psi_{j,k} > \psi_{j,k}(x)$$

Remarque. Contrairement aux séries de Fourier, il n'y a pas d'"ordre naturel" pour les ondelettes. Par conséquent, la notion de convergence poncuelle n'a pas une définition aussi naturelle.

- On étudie la convergence ponctuelle du développement

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} | < f,\varphi_k > \varphi_k(x)| + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} | < f,\psi_{j,k} > \psi_{j,k}(x)|$$

  qui ne dépend pas de l'ordre choisi (comportement semblable, contrairement à Fourier)
- On se place dans le cadre périodique : Une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ est donnée par la fonction constante égale à 1 et les ondelettes périodisées

$$\Psi_{j,k} : x \mapsto \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x-l), \quad j\in\mathbb{N},\ k\in\{0,\dots,2^j-1\}$$

Cas des espaces L^p

Rappel. La série de Fourier d'une fonction de $L^p(\mathbb{T})$ $(1 < p < +\infty)$ converge presque partout.

Kelly, Kon et Raphael (1994)

Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < +\infty)$, son expansion en ondelettes converge presque partout (quelque soit l'ordre de sommation).

Question.
Soit x un point de divergence du développement de $f \in L^p$. Caractérisation du taux de divergence ? Taille de l'ensemble des points ayant un taux de divergence donné ?

Inégalité de Hölder. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$|< f, \Psi_{j,k} >| \leq C_\Psi 2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\|f\|_p \implies \| < f, \Psi_{j,k} > \Psi_{j,k}\|_\infty \leq C_\psi 2^{\frac{j}{p}}$$

Aubry (2006)

Si $p > 1$ et si $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors pour tout $\beta \in [0, 1/p]$,

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : \limsup_{J\to\infty} 2^{-\beta J} \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{2^j-1} |< f, \Psi_{j,k} > \Psi_{j,k}(x)| > 0 \right\} \leq 1 - \beta p$$

Réciproquement, si ψ est l'ondelette de Haar, étant donné un ensemble E tel que $\dim_{\mathcal{H}} E < 1 - \beta p$, il existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ tel que

$$\limsup_{J\to\infty} 2^{-\beta J} \left| \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{2^j-1} < f, \Psi_{j,k} > \Psi_{j,k}(x) \right| = +\infty \quad \forall x \in E.$$

Analyse multifractale de la divergence

- Exposant de divergence au point x :

$$\gamma_f(x) = \sup\left\{\gamma : \ \exists C > 0, \ \exists (j_n, k_n), \ | < f, \psi_{j_n,k_n} > \psi_{j_n,k_n}(x)| \geq C2^{\gamma j_n}\right\}$$

- Spectre multifractal de la divergence :

$$D_f : \gamma \mapsto \dim\left\{x : \quad \gamma_f(x) = \gamma\right\}$$

Analyse multifractale de la divergence

- Exposant de divergence au point x :

$$\gamma_f(x) = \sup \left\{ \gamma : \ \exists C > 0, \ \exists (j_n, k_n), \ | < f, \psi_{j_n,k_n} > \psi_{j_n,k_n}(x)| \geq C 2^{\gamma j_n} \right\}$$

- Spectre multifractal de la divergence :

$$D_f : \gamma \mapsto \dim \left\{ x : \quad \gamma_f(x) = \gamma \right\}$$

Remarques.

- Puisque l'ondelette est à décroissance rapide, on a

$$\gamma_f(x) = \limsup_{J \to \infty} \frac{\log \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} | < f, \psi_{j,k} > \psi_{j,k}(x)| \right)}{\log 2^J}$$

- Un exposant de divergence ne donne une divergence de la série d'ondelette que s'il est positif !

Espaces de Sobolev et de Besov

Espaces de Sobolev. Si $p \geq 1$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L^{p,s} &:= \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \mathcal{F}^{-1}\Big((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F} f \Big) \in L^p(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : D^k f \in L^p(\mathbb{R}) \; \forall k \leq s \right\} \quad \text{si } s \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Espaces de Besov. Si $p, q > 0$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$B^{s,q}_p := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \Big(2^{sj} \| \mathcal{F}^{-1}\big(\phi_j \mathcal{F} f\big) \|_{L^p(\mathbb{R})} \Big)_{j \in \mathbb{N}} \in l^q \right\}$$

Espaces de Sobolev et de Besov

Espaces de Sobolev. Si $p \geq 1$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L^{p,s} &:= \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f\right) \in L^p(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : D^k f \in L^p(\mathbb{R})\ \forall k \leq s \right\} \quad \text{si } s \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Espaces de Besov. Si $p, q > 0$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$B_p^{s,q} := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \left(2^{sj}\|\mathcal{F}^{-1}\left(\phi_j \mathcal{F}f\right)\|_{L^p(\mathbb{R})}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in l^q \right\}$$

On va travailler dans les espaces de Besov. Grâce aux inclusions

$$B_p^{s,1} \hookrightarrow L^{p,s} \hookrightarrow B_p^{s,\infty}$$

pour tout $p \geq 1$ et tout $s \in \mathbb{R}$, on obtiendra des résultats similaires pour les espaces de Sobolev.

Espaces de Besov et ondelettes

On utilise une ondelette ψ suffisamment régulière (au moins continue par morceaux) et une normalisation L^∞ des ondelettes, i.e. on pose

$$\psi_{j,k} := \psi(2^j x - k) \quad j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}$$

Les coefficients d'ondelettes de f sont donnés par

$$C_k := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x-k)dx \quad \text{et} \quad c_{j,k} := 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(2^j x - k)dx$$

Espaces de Besov et ondelettes

On utilise une ondelette ψ suffisamment régulière (au moins continue par morceaux) et une normalisation L^∞ des ondelettes, i.e. on pose

$$\psi_{j,k} := \psi(2^j x - k) \quad j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}$$

Les coefficients d'ondelettes de f sont donnés par

$$C_k := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x-k)dx \quad \text{et} \quad c_{j,k} := 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(2^j x - k)dx$$

Caractérisation des espaces de Besov. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q > 0$. Alors

$$f \in B_p^{s,q} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j} \right|^p \right)^{1/p} = \varepsilon_j \quad \text{avec} \quad \varepsilon_j \in l^q \\ \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |C_k|^p \right)^{1/p} < +\infty \end{array} \right.$$

$$f \in B_p^{s,q} \Longrightarrow \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j} \right|^p \right)^{1/p} = \varepsilon_j \quad \text{avec} \quad \varepsilon_j \in l^q$$

En particulier,

$$\exists C > 0 \ : \ \forall j \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \leq C \quad \Longrightarrow \boxed{|c_{j,k}| \leq C^{\frac{1}{p}} 2^{(\frac{1}{p}-s)j}}$$

$$f \in B_p^{s,q} \Longrightarrow \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j} \right|^p \right)^{1/p} = \varepsilon_j \quad \text{avec} \quad \varepsilon_j \in l^q$$

En particulier,

$$\exists C > 0 \ : \ \forall j \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \leq C \quad \Longrightarrow \boxed{|c_{j,k}| \leq C^{\frac{1}{p}} 2^{(\frac{1}{p}-s)j}}$$

Conséquence. Si $f \in B_p^{s,q}$, alors

$$\boxed{\gamma_f(x) \leq \frac{1}{p} - s, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.}$$

Remarque. Le cas intéressant est celui où $s < \frac{1}{p}$. Néanmoins, les résultats obtenus restent valides si $s \geq \frac{1}{p}$.

E., Jaffard (2015)

Si $f \in B_p^{s,q}$, alors pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$, on a

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{x : \ \gamma_f(x) \geq \gamma\right\} \leq 1 - sp - \gamma p.$$

En particulier, le spectre de divergence de f satisfait

$$D_f(\gamma) \leq 1 - sp - \gamma p.$$

E., Jaffard (2015)

Si $f \in B_p^{s,q}$, alors pour tout $\gamma \in [-s, \frac{1}{p} - s]$, on a

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{x : \ \gamma_f(x) \geq \gamma\right\} \leq 1 - sp - \gamma p.$$

En particulier, le spectre de divergence de f satisfait

$$D_f(\gamma) \leq 1 - sp - \gamma p.$$

Preuve. On pose

$$E_{j,\gamma} := \left\{k : |c_{j,k}| \geq 2^{\gamma j}\right\}, \ E_{j,\gamma}^{\varepsilon} := \bigcup_{k \in E_{j,\gamma}} \left]k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j}\right[$$

$$E_{\gamma}^{\varepsilon} := \limsup_{j \to +\infty} E_{j,\gamma}^{\varepsilon}.$$

E., Jaffard (2015)

Si $f \in B_p^{s,q}$, alors pour tout $\gamma \in [-s, \frac{1}{p} - s]$, on a

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{x : \ \gamma_f(x) \geq \gamma\right\} \leq 1 - sp - \gamma p.$$

En particulier, le spectre de divergence de f satisfait

$$D_f(\gamma) \leq 1 - sp - \gamma p.$$

Preuve. On pose

$$E_{j,\gamma} := \left\{k : |c_{j,k}| \geq 2^{\gamma j}\right\}, \ E^{\varepsilon}_{j,\gamma} := \bigcup_{k \in E_{j,\gamma}} \left]k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j}\right[$$

$$E^{\varepsilon}_{\gamma} := \limsup_{j \to +\infty} E^{\varepsilon}_{j,\gamma}.$$

Puisque $\sum_k |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \leq C$, on a

$$\#E_{j,\gamma} \leq C \cdot 2^{(1-sp-\gamma p)j},$$

et donc

$$\dim_{\mathcal{H}}(E^{\varepsilon}_{\gamma}) \leq \frac{1 - sp - \gamma p}{1 - \varepsilon}.$$

Si on a

$$\{x : \gamma_f(x) > \gamma\} \subset E_\gamma^\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

on aura alors

$$\dim_{\mathcal{H}}\{x : \gamma_f(x) > \gamma\} \leq 1 - sp - \gamma p \quad \forall \gamma.$$

Si on a

$$\{x : \gamma_f(x) > \gamma\} \subset E_\gamma^\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

on aura alors

$$\dim_{\mathcal{H}}\{x : \gamma_f(x) > \gamma\} \leq 1 - sp - \gamma p \quad \forall \gamma.$$

Par conséquent, pour tout $\delta > 0$, on aura

$$\dim_{\mathcal{H}}\{x : \gamma_f(x) \geq \gamma\} \leq \dim_{\mathcal{H}}\{x : \gamma_f(x) > \gamma - \delta\} \leq 1 - sp - (\gamma - \delta)p$$

d'où

$$\dim_{\mathcal{H}}\{x : \gamma_f(x) \geq \gamma\} \leq 1 - sp - \gamma p.$$

Montrons que

$$\boxed{x \notin E_\gamma^\varepsilon \Longrightarrow \gamma_f(x) \leq \gamma}$$

On estime $|c_{j,k}\psi_{j,k}(x)|$. Rappelons que

$$E_\gamma^\varepsilon = \limsup_{j\to+\infty} \bigcup_{k\in E_{j,\gamma}} \left]k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j}\right[$$

Montrons que

$$\boxed{x \notin E_\gamma^\varepsilon \Longrightarrow \gamma_f(x) \leq \gamma}$$

On estime $|c_{j,k}\psi_{j,k}(x)|$. Rappelons que

$$E_\gamma^\varepsilon = \limsup_{j\to+\infty} \bigcup_{k\in E_{j,\gamma}} \left]k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j}\right[$$

1. $\underline{k \notin E_{j,\gamma} \text{ i.e. } |c_{j,k}| < 2^{\gamma j}}$, alors $|c_{j,k}\psi_{j,k}(x)| \leq 2^{\gamma j}$.
2. $\underline{k \in E_{j,\gamma} \text{ i.e. } |c_{j,k}| \geq 2^{\gamma j}}$ Vu la décroissance rapide des ondelettes,

$$\forall N,\ \exists C_N \ \text{ tel que } \quad |\psi(2^j x - k)| \leq \frac{C_N}{(1 + |2^j x - k|)^N}.$$

Comme $x \notin E_\gamma^\varepsilon$ et $k \in E_{j,\gamma}$, on a $|2^j x - k| \geq 2^{\varepsilon j}$ si $j \gg$ et donc

$$|\psi(2^j x - k)| \leq C_N 2^{-\varepsilon N j}.$$

Rappelons que $|c_{j,k}| \leq C2^{-(s-1/p)j}$, d'où

$$|c_{j,k}\psi_{j,k}(x)| \leq C_N C 2^{-(s-1/p)j} 2^{-\varepsilon N j} \leq 2^{\gamma j} \ \text{ si } \ j \gg .$$

Optimalité du résultat

E., Jaffard (2015)

Quasi-toute fonction $f \in B^{s,q}_p$ satisfait

$$\gamma_f(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right] \quad \forall x$$

et

$$D_f(\gamma) = \dim_{\mathcal{H}} \left\{x : \gamma_f(x) = \gamma\right\} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right].$$

Remarque. On se place dans un premier temps sur $[0, 1[$ et on considère les ondelettes $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$.

Optimalité du résultat

E., Jaffard (2015)

Quasi-toute fonction $f \in B_p^{s,q}$ satisfait

$$\gamma_f(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right] \quad \forall x$$

et

$$D_f(\gamma) = \dim_{\mathcal{H}} \left\{x : \gamma_f(x) = \gamma\right\} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right].$$

Remarque. On se place dans un premier temps sur $[0, 1[$ et on considère les ondelettes $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}$.

Fonction de saturation F_a :

$$c_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p} - s)j} 2^{-\frac{1}{p} J} & \text{avec} \quad \dfrac{k}{2^j} = \dfrac{K}{2^J},\ K \notin 2\,\mathbb{Z} \\ 0 \quad \text{si} \quad k = 0 \end{cases}$$

Montrons que

(1) $F_a \in B_p^{s,q}$

(2) $\gamma_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x

(3) $\dim_{\mathcal{H}} \left\{x : \gamma_{F_a}(x) = \gamma\right\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$

(4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

Montrons que

(1) $F_a \in B_p^{s,q}$

(2) $\gamma_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x

(3) $\dim_{\mathcal{H}} \left\{x : \gamma_{F_a}(x) = \gamma\right\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$

(4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

Lemme

Si $a > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $F_a \in B_p^{s,q}$.

Preuve. Pour tout $J \leq j$, il y a 2^J coefficients tels que $\frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p = \frac{1}{j^{ap}} \sum_{J=1}^{j} 2^J (2^{-\frac{J}{p}})^p = j^{1-ap},$$

et il faut

$$\sum_{j\geq 1} (j^{\frac{1}{p}-a})^q < \infty.$$

Ok si $(\frac{1}{p} - a)q < -1$ i.e. si $a > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Montrons que

(1) $F_a \in B_p^{s,q}$ ✓

(2) $\gamma_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x

(3) $\dim_{\mathcal{H}} \left\{x : \gamma_{F_a}(x) = \gamma\right\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$

(4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

Lemme

Si $a > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $F_a \in B_p^{s,q}$.

Preuve. Pour tout $J \leq j$, il y a 2^J coefficients tels que $\frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p = \frac{1}{j^{ap}} \sum_{J=1}^{j} 2^J (2^{-\frac{J}{p}})^p = j^{1-ap},$$

et il faut

$$\sum_{j \geq 1} (j^{\frac{1}{p}-a})^q < \infty.$$

Ok si $(\frac{1}{p} - a)q < -1$ i.e. si $a > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Lemme

Il existe $C > 0$ et (j_l, k_l) , $l \in \{1, \dots, L\}$, tels que

$$\forall x \in [0,1] \; \exists l \in \{1, \dots, L\} : \quad \left|\psi(2^{j_l} x - k_l)\right| \geq C.$$

Preuve. Pour tout $x \in [0,1]$, il existe une ondelette $\psi_{j,k}$ telle que $\psi(2^j x - k) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage I_x de x sur lequel

$$\forall y \in I_x, \qquad |\psi(2^j y - k)| \geq C_x > 0.$$

Puisque ces boules recouvrent $[0,1]$, on peut en extraire un recouvrement fini. $\square$

Lemme

Il existe $C > 0$ et (j_l, k_l) , $l \in \{1, \dots, L\}$, tels que

$$\forall x \in [0,1] \; \exists l \in \{1, \dots, L\} : \quad \left|\psi(2^{j_l}x - k_l)\right| \geq C.$$

Preuve. Pour tout $x \in [0,1]$, il existe une ondelette $\psi_{j,k}$ telle que $\psi(2^j x - k) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage I_x de x sur lequel

$$\forall y \in I_x, \qquad |\psi(2^j y - k)| \geq C_x > 0.$$

Puisque ces boules recouvrent $[0,1]$, on peut extraire un recouvrement fini. $\square$

Soit $J_0 = \max_{l \in \{1,\dots,L\}} j_l$. Pour tout x et tout j, il existe une ondelette $\psi(2^{j'}x - k')$ telle que $|j' - j| \leq J_0$ et $|\psi(2^{j'}x - k')| \geq C$.

Lemme

Il existe $C > 0$ et (j_l, k_l) , $l \in \{1, \dots, L\}$, tels que

$$\forall x \in [0,1] \; \exists l \in \{1, \dots, L\} : \quad \left|\psi(2^{j_l} x - k_l)\right| \geq C.$$

Preuve. Pour tout $x \in [0,1]$, il existe une ondelette $\psi_{j,k}$ telle que $\psi(2^j x - k) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage I_x de x sur lequel

$$\forall y \in I_x, \qquad |\psi(2^j y - k)| \geq C_x > 0.$$

Puisque ces boules recouvrent $[0,1]$, on peut en extraire un recouvrement fini. $\square$

Soit $J_0 = \max_{l \in \{1,\dots,L\}} j_l$. Pour tout x et tout j, il existe une ondelette $\psi(2^{j'} x - k')$ telle que $|j' - j| \leq J_0$ et $|\psi(2^{j'} x - k')| \geq C$. On a alors

$$|c_{j',k'} \psi(2^{j'} x - k')| \geq C \frac{1}{j'^a} 2^{(\frac{1}{p} - s)j'} 2^{-\frac{1}{p} J'} \geq \frac{2^{-sj'}}{j'^a}.$$

Par conséquent,

$$\gamma_{F_a}(x) \geq -s, \quad \forall x.$$

(1) $F_a \in B_p^{s,q}$ $\checkmark$

(2) $\gamma_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x $\checkmark$

(3) $\dim_{\mathcal{H}} \left\{x : \gamma_{F_a}(x) = \gamma\right\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$

(4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

(1) $F_a \in B_p^{s,q}$ $\checkmark$

(2) $\gamma_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x $\checkmark$

(3) $\dim_{\mathcal{H}} \{x : \gamma_{F_a}(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$

$\longrightarrow$ Approximation par les dyadiques

(4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

Approximation par les dyadiques

Remarque. Vu les hypothèses sur ψ, on peut considérer $C > 0$ et un sous-intervalle $\nu \subset [0, 1[$ tels que

$$\forall x \in \nu, \quad |\psi(x)| \geq C.$$

Approximation par les dyadiques

Remarque. Vu les hypothèses sur ψ, on peut considérer $C > 0$ et un sous-intervalle $\nu \subset [0,1[$ tels que
$$\forall x \in \nu, \quad |\psi(x)| \geq C.$$

Points de type $\alpha \geq 1$. On note $x \in \mathcal{T}_\alpha$ s'il existe (J_n, K_n) tels que

1. $K_n \notin 2\,\mathbb{Z}$,
2. $x \in \left[\dfrac{K_n}{2^{J_n}}, \dfrac{K_n+1}{2^{J_n}}\right)$,
3. $\left|x - \dfrac{K_n}{2^{J_n}}\right| \leq \dfrac{1}{2^{[\alpha J_n]}}$,
4. si k_n correspond à l'intervalle dyadique de taille $2^{-[\alpha J_n]}$ qui contient x, alors
$$2^{[\alpha J_n]}x - k_n \in \nu.$$

1 – 3 : Définit l'ensemble $\mathcal{D}_\alpha$ des points α-approximables par les dyadiques

$$c_{j,k} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}J_n} \quad \text{où} \quad j = [\alpha J_n],\ k = k_n$$

1 – 3 : Définit l'ensemble $\mathcal{D}_\alpha$ des points α-approximables par les dyadiques

$$c_{j,k} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}J_n} \quad \text{où} \quad j = [\alpha J_n],\ k = k_n$$

4 : l'ondelette correspondante est suffisamment grande au point considéré

$$|\psi_{j,k}(x)| \geq C \quad \text{où} \quad j = [\alpha J_n],\ k = k_n.$$

1 – 3 : Définit l'ensemble $\mathcal{D}_\alpha$ des points α-approximables par les dyadiques

$$c_{j,k} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}J_n} \quad \text{où} \quad j = [\alpha J_n],\ k = k_n$$

4 : l'ondelette correspondante est suffisamment grande au point considéré

$$|\psi_{j,k}(x)| \geq C \quad \text{où} \quad j = [\alpha J_n],\ k = k_n.$$

Lemme

Si $x \in \mathcal{T}_\alpha$, alors l'exposant de divergence en x est plus grand que $\frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}$, i.e.

$$\mathcal{T}_\alpha \subseteq \left\{ x : \gamma_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\}.$$

Question. Calcul de $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha$?

- On a $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$

Question. Calcul de $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha$?

- On a $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$
- $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{D}_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ (en fait, $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}}(\mathcal{D}_\alpha) > 0$) $\Longrightarrow \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}$

Question. Calcul de $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha$?

- On a $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$
- $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{D}_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ (en fait, $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}}(\mathcal{D}_\alpha) > 0$) $\Longrightarrow \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}$
- Techniques d'ubiquité : $\mathcal{T}_\alpha =$ ensemble limsup dont les éléments sont les intervalles $2^{-[\alpha j]}(\nu + k)$ de côté $r_j = c2^{-[\alpha j]}$

Question. Calcul de $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha$?

- On a $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$
- $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{D}_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ (en fait, $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}}(\mathcal{D}_\alpha) > 0$) $\Longrightarrow \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}$
- Techniques d'ubiquité : $\mathcal{T}_\alpha =$ ensemble limsup dont les éléments sont les intervalles $2^{-[\alpha j]}(\nu + k)$ de côté $r_j = c2^{-[\alpha j]}$
- Ces intervalles "recouvrent bien" $[0, 1[$: si $D > 0$ est choisi suffisamment grand, les intervalles dyadiques de même centre et de côté $Dr_j^{1/\alpha}$ recouvrent $[0, 1[$

$$\boxed{\Longrightarrow \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha = \frac{1}{\alpha}}$$

Question. Calcul de $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha$?

- On a $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$
- $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{D}_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ (en fait, $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}}(\mathcal{D}_\alpha) > 0$) $\Longrightarrow \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}$
- Techniques d'ubiquité : $\mathcal{T}_\alpha =$ ensemble limsup dont les éléments sont les intervalles $2^{-[\alpha j]}(\nu + k)$ de côté $r_j = c2^{-[\alpha j]}$
- Ces intervalles "recouvrent bien" $[0,1[$: si $D > 0$ est choisi suffisamment grand, les intervalles dyadiques de même centre et de côté $Dr_j^{1/\alpha}$ recouvrent $[0,1[$

$$\boxed{\Longrightarrow \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha = \frac{1}{\alpha}}$$

Puisque

$$\mathcal{T}_\alpha \subseteq \left\{ x : \gamma_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\},$$

on en tire que

$$\boxed{\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : \gamma_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} = \frac{1}{\alpha}}$$

Raffinement du résultat précédent

On a même plus...

- $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha},2}(\mathcal{T}_\alpha) > 0$
- $\left\{x : \gamma_f(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{x : \gamma_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{n}\right\}}_{\dim_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}}$

$$\Longrightarrow \mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha},2}\left(\left\{x : \gamma_{F_a}(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}\right\}\right) = 0$$

Raffinement du résultat précédent

On a même plus...

- $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha},2}(\mathcal{T}_\alpha) > 0$
- $\left\{x : \gamma_f(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{x : \gamma_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{n}\right\}}_{\dim_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}}$

$$\Longrightarrow \mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha},2}\left(\left\{x : \gamma_{F_a}(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}\right\}\right) = 0$$

- $\underbrace{\mathcal{T}_\alpha}_{\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha},2}>0} \subset \left\{x : \gamma_{F_a}(x) = \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}\right\} \cup \underbrace{\left\{x : \gamma_{F_a}(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}\right\}}_{\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha},2}=0}$

$$\Longrightarrow \dim_{\mathcal{H}}\left\{x : \gamma_{F_a}(x) = \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}\right\} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : \gamma_{F_a}(x) = \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} = \frac{1}{\alpha}, \quad \forall \alpha \geq 1$$

$$\boxed{\Longrightarrow \dim_{\mathcal{H}} \{ x : \gamma_{F_a}(x) = \gamma \} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \geq -s}$$

$$\dim_{\mathcal{H}}\left\{x : \gamma_{F_a}(x) = \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}\right\} = \frac{1}{\alpha}, \quad \forall \alpha \geq 1$$

$$\boxed{\Longrightarrow \dim_{\mathcal{H}}\{x : \gamma_{F_a}(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \geq -s}$$

(1) $F_a \in B_p^{s,q}$ ✓

(2) $\gamma_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x ✓

(3) $\dim_{\mathcal{H}}\left\{x : \gamma_{F_a}(x) = \gamma\right\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ ✓

(4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

Construction de l'ensemble résiduel

$$\|f\|_{B^{s,q}_p} = \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j - 1} \left| c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j} \right|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

Construction de l'ensemble résiduel

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \left(\sum_{j\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} \left| c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j} \right|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

- L'ensemble $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des séries d'ondelettes finies à coefficients rationnels est dense dans $B_p^{s,q}$
- On considère une suite croissante $(N_n)_n$ telle que les coefficients d'ondelettes de f_n sont nuls pour $j \geq N_n$
- $g_n = f_n + \frac{1}{N_n} F_a$ a les mêmes propriétés de divergence que F_a et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $B_p^{s,q}$
- On considère le G_δ dense

$$\mathcal{R} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} B(g_n, r_n), \quad \text{où} \quad r_n = \frac{1}{2N_n^a} 2^{-\frac{N_n}{p}}$$

$$\boxed{\mathcal{R} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} B(g_n, r_n), \quad \text{où} \quad r_n = \frac{1}{2N_n^a} 2^{-\frac{N_n}{p}}}$$

$$\begin{aligned}
f \in B(g_n, r_n) \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{j\geq 0} \left(2^{(sp-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} \left| f_{j,k} - g_{j,k}^n \right|^p \right)^{q/p} < r_n^q \\
&\Longrightarrow \quad 2^{(s-\frac{1}{p})N_n} \left| f_{N_n,k} - \frac{c_{N_n,k}}{N_n} \right| < r_n \\
&\Longrightarrow \quad \left| f_{N_n,k} - \frac{c_{N_n,k}}{N_n} \right| < \frac{1}{2N_n^a} 2^{-sN_n} \\
&\Longrightarrow \quad \boxed{|f_{N_n,k}| \geq \frac{1}{N_n} |c_{N_n,k}| - \frac{1}{2N_n^a} 2^{-sN_n}}
\end{aligned}$$

$$f \in \mathcal{R} \Longrightarrow f \in B(g_{n_l}, r_{n_l}), \quad l \in \mathbb{N}$$

On note $x \in \mathcal{T}_\alpha(f)$ s'il existe une infinité de K_l tels que si $j = N_{n_l}$

1. $K_l \notin 2\,\mathbb{Z}$,
2. $x \in \left[\frac{K_l}{2^{[\frac{j}{\alpha}]}}, \frac{K_l + 1}{2^{[\frac{j}{\alpha}]}}\right)$,
3. $\left|x - \frac{K_l}{2^{[\frac{j}{\alpha}]}}\right| \leq \frac{1}{2^j}$,
4. si k_l correspond à l'intervalle dyadique de taille 2^{-j} qui contient x, alors
$$2^j x - k_l \in \nu.$$

Remarque. La définition de $\mathcal{T}_\alpha(f)$ est similaire à celle de $\mathcal{T}_\alpha$, excepté que seulement une sous-suite d'entiers (définie à partir de f) est prise en compte.

Donc si $x \in \mathcal{T}_\alpha(f)$, on a $|\psi_{j,k_l}(x)| \geq C$ et

$$c_{j,k_l} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}[\frac{j}{\alpha}]}.$$

pour $j = N_{n_l}$.

Donc si $x \in \mathcal{T}_\alpha(f)$, on a $|\psi_{j,k_l}(x)| \geq C$ et

$$c_{j,k_l} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}[\frac{j}{\alpha}]}.$$

pour $j = N_{n_l}$. Comme $f \in B(g_{n_l}, r_{n_l})$, on obtient

$$\begin{aligned} |f_{j,k_l}| &\geq \frac{1}{j}|c_{j,k_l}| - \frac{1}{2j^a} 2^{-sj} \\ &\geq \frac{1}{j^{a+1}} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}[\frac{j}{\alpha}]} - \frac{1}{2j^a} 2^{-sj} \\ &\geq \frac{1}{2j^{a+1}} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}[\frac{j}{\alpha}]} \end{aligned}$$

si $l \gg$. Donc,

$$\gamma_f(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}.$$

$$\boxed{\mathcal{T}_\alpha(f) \subseteq \left\{x : d_f(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}\right\}}$$

Comme fait précédemment, on trouve que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{T}_\alpha(f)) = \frac{1}{\alpha}$$

et on peut en déduire que

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(\left\{x : d_f(x) = \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}\right\}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

d'où

$$\boxed{\dim_{\mathcal{H}}\{x : \gamma_f(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \geq -s, \quad \forall f \in \mathcal{R}}$$

$\square$

Autres résultats

- Passage à $\mathbb{R}$: on prend comme fonction de saturation la fonction

$$\widetilde{F_a} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k} F_a(x-k)$$

- Résultats similaires obtenus avec la notion de prévalence. L'idée est de considérer les coefficients

$$c_{j,k} = \frac{\xi_{j,k}}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}J}$$

où les $\xi_{j,k} \sim^{iid} \mathcal{N}(0,1)$.

Références

J.M. Aubry.
On the rate of pointwise divergence of Fourier and wavelet series in L^p.
J. Approx. Theory, 538 :97–111, 2006.

F. Bayart and Y. Heurteaux.
Multifractal analysis of the divergence of Fourier series.
Ann. Sci. Ec. Norm. Supér., 45 :927–946, 2012. 22 :663–682, 2006.

S. Jaffard.
On the Frisch-Parisi conjecture.
J. Math. Pures Appl., 79(6) :525–552., 2000.

S.E. Kelly, M.A. Kon, and L.A. Raphael.
Local convergence for wavelet expansion.
J. Funct. Anal., 126 :102–138, 1994.

Y. Meyer.
Ondelettes et opérateurs.
Hermann, 1990.

G.G. Walter.
Pointwise convergence of wavelet expansions.
J. Approx. Theory, 80 :108–118, 1995.