Défense de Thèse
On generalized Hölder-Zygmund spaces

Damien Kreit

Promoteur :	Prof. Samuel Nicolay
Co-promoteur :	Prof. Françoise Bastin
Jury :	Prof. Stéphane Jaffard
	Prof. Jean-Pierre Schneiders
	Prof. Jochen Wengenroth

Université de Liège

23 Juin 2016

Table des matières

Table des matières

Contexte

$$\begin{array}{c} B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d) \\ \Big\uparrow \text{généralisation} \\ \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R}^d) = B^{\alpha}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) \end{array}$$

Contexte

$$
\begin{tikzcd}
B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d) \arrow[rr, "\text{généralisation}"] & & B^{\sigma^{-1}}_{p,q}(\mathbb{R}^d) \\
\Lambda^{\alpha}(\mathbb{R}^d) = B^{\alpha}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) \arrow[u, "\text{généralisation}"] & &
\end{tikzcd}
$$

Contexte

$$
\begin{array}{ccc}
B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d) & \xrightarrow{\text{généralisation}} & B^{\sigma^{-1}}_{p,q}(\mathbb{R}^d) \\
\uparrow \text{généralisation} & & \\
\Lambda^{\alpha}(\mathbb{R}^d) = B^{\alpha}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) & \xrightarrow{\text{généralisation}} & \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)
\end{array}
$$

Contexte

$$
\begin{tikzcd}
B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d) \arrow[rr, "\text{généralisation}"] & & B^{\sigma^{-1}}_{p,q}(\mathbb{R}^d) \\
\Lambda^{\alpha}(\mathbb{R}^d) = B^{\alpha}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) \arrow[u, "\text{généralisation}"] \arrow[rr, "\text{généralisation}"] & & \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d) = B^{\sigma^{-1}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) \arrow[u, "\text{généralisation}"']
\end{tikzcd}
$$

Table des matières

Notations

- si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \sup\{M \in \mathbb{Z} : M \leq x\}$,
- si f est défini sur $\mathbb{R}^d$,

$$\Delta_h^1 f(x) := f(x+h) - f(x)$$
$$\Delta_h^M f(x) := \Delta_h^1 \Delta_h^{M-1} f(x) \qquad (M \in \mathbb{N}^*).$$

Notations

- si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \sup\{M \in \mathbb{Z} : M \leq x\}$,
- si f est défini sur $\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \Delta_h^1 f(x) &:= f(x+h) - f(x) \\ \Delta_h^M f(x) &:= \Delta_h^1 \Delta_h^{M-1} f(x) \qquad (M \in \mathbb{N}^*). \end{aligned}$$

Définition des suites admissibles

Définition

Une suite de réels positifs $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est appelée *admissible* s'il existe deux constantes positives d_0 et d_1 telles que

$$d_0\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq d_1\sigma_j, \qquad j \in \mathbb{N}_0\,.$$

On pose

$$\underline{s}(\sigma) := \lim_{j\to+\infty} \frac{\log_2(\inf_{k\geq 0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k})}{j} \quad \text{et} \quad \overline{s}(\sigma) := \lim_{j\to+\infty} \frac{\log_2(\sup_{k\geq 0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k})}{j}.$$

Propriété : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$c_1 2^{(\underline{s}(\sigma)-\varepsilon)j} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq c_2 2^{(\overline{s}(\sigma)+\varepsilon)j} \qquad (j,k \in \mathbb{N}_0).$$

Définition des suites admissibles

Définition

Une suite de réels positifs $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est appelée *admissible* s'il existe deux constantes positives d_0 et d_1 telles que

$$d_0\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq d_1\sigma_j, \qquad j \in \mathbb{N}_0\,.$$

On pose

$$\underline{s}(\sigma) := \lim_{j\to+\infty} \frac{\log_2(\inf_{k\geq 0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k})}{j} \quad \text{et} \quad \overline{s}(\sigma) := \lim_{j\to+\infty} \frac{\log_2(\sup_{k\geq 0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k})}{j}.$$

Propriété : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$c_1 2^{(\underline{s}(\sigma)-\varepsilon)j} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq c_2 2^{(\overline{s}(\sigma)+\varepsilon)j} \qquad (j,k \in \mathbb{N}_0).$$

Définition des suites admissibles

Définition

Une suite de réels positifs $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est appelée *admissible* s'il existe deux constantes positives d_0 et d_1 telles que

$$d_0\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq d_1\sigma_j, \qquad j \in \mathbb{N}_0\,.$$

On pose

$$\underline{s}(\sigma) := \lim_{j\to+\infty} \frac{\log_2(\inf_{k\geq 0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k})}{j} \quad \text{et} \quad \overline{s}(\sigma) := \lim_{j\to+\infty} \frac{\log_2(\sup_{k\geq 0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k})}{j}.$$

<u>Propriété</u> : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$c_1 2^{(\underline{s}(\sigma)-\varepsilon)j} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq c_2 2^{(\overline{s}(\sigma)+\varepsilon)j} \qquad (j,k \in \mathbb{N}_0).$$

Exemples de suite admissible

1. La suite $\sigma_j := 2^{j\alpha} j^\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ est admissible et vérifie

$$\underline{s}(\sigma) = \overline{s}(\sigma) = \alpha.$$

2. Soient $s_0 \geq 0$, $s_1 > 0$, et

$$j_0 = 0, \quad j_1 = 1, \quad j_{2n} = 2j_{2n-1} - j_{2n-2}, \quad j_{2n+1} = 2^{j_{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On définit une suite σ par

$$\sigma_0 = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_{j+1} = \begin{cases} \sigma_j 2^{s_0} & \text{si } j_{2n} \leq j < j_{2n+1}, \\ \sigma_j 2^{s_0+s_1} & \text{si } j_{2n+1} \leq j < j_{2n+2}. \end{cases}$$

On a $\underline{s}(\sigma) = s_0$ et $\overline{s}(\sigma) = s_0 + s_1$.

Exemples de suite admissible

1. La suite $\sigma_j := 2^{j\alpha} j^{\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ est admissible et vérifie

$$\underline{s}(\sigma) = \overline{s}(\sigma) = \alpha.$$

2. Soient $s_0 \geq 0$, $s_1 > 0$, et

$$j_0 = 0, \quad j_1 = 1, \quad j_{2n} = 2j_{2n-1} - j_{2n-2}, \quad j_{2n+1} = 2^{j_{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}^* .$$

   On définit une suite σ par

$$\sigma_0 = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_{j+1} = \begin{cases} \sigma_j 2^{s_0} & \text{si } j_{2n} \leq j < j_{2n+1}, \\ \sigma_j 2^{s_0+s_1} & \text{si } j_{2n+1} \leq j < j_{2n+2}. \end{cases}$$

   On a $\underline{s}(\sigma) = s_0$ et $\overline{s}(\sigma) = s_0 + s_1$.

Définition des espaces

Définition

Soit $\alpha > 0$. On définit l'*espace de Hölder-Zygmund* $\Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d)$ par

$$\Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{j\alpha} \sup_{|h| \leq 2^{-j}} \|\Delta_h^{\lfloor \alpha \rfloor + 1} f\|_{L^\infty} < \infty\}.$$

Définition

Soient $\alpha > 0$ et $\sigma = (\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ une suite admissible. On définit l'*espace de Hölder-Zygmund généralisé* $\Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sigma_j^{-1} \sup_{|h| \leq 2^{-j}} \|\Delta_h^{\lfloor \alpha \rfloor + 1} f\|_{L^\infty} < \infty \right\}.$$

Définition des espaces

Définition

Soit $\alpha > 0$. On définit l'*espace de Hölder-Zygmund* $\Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d)$ par

$$\Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j\alpha} \sup_{|h|\leq 2^{-j}} \|\Delta_h^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f\|_{L^\infty} < \infty\}.$$

Définition

Soient $\alpha > 0$ et $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite admissible. On définit l'*espace de Hölder-Zygmund généralisé* $\Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d) = \left\{f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sigma_j^{-1} \sup_{|h|\leq 2^{-j}} \|\Delta_h^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f\|_{L^\infty} < \infty\right\}.$$

Premières propriétés

- On a $\Lambda^{(2^{-j\alpha})_j,\alpha}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$.
- L'espace $\Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach avec

$$\|f\|_{\Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sigma_j^{-1} \sup_{|h|\leq 2^{-j}} \|\Delta_h^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f\|_{L^\infty}.$$

- Si $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$, alors

$$B^{\sigma^{-1}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,\overline{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,M-1}(\mathbb{R}^d)$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $M > \overline{s}(\sigma^{-1})$ [S. Moura, 2007].

Premières propriétés

- On a $\Lambda^{(2^{-j\alpha})_j,\alpha}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d)$.
- L'espace $\Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach avec

$$\|f\|_{\Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sigma_j^{-1} \sup_{|h|\leq 2^{-j}} \|\Delta_h^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f\|_{L^\infty}.$$

- Si $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$, alors

$$B^{\sigma^{-1}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,\overline{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,M-1}(\mathbb{R}^d)$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $M > \overline{s}(\sigma^{-1})$ [S. Moura, 2007].

Premières propriétés

- On a $\Lambda^{(2^{-j\alpha})_j,\alpha}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$.
- L'espace $\Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach avec

$$\|f\|_{\Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sigma_j^{-1} \sup_{|h|\leq 2^{-j}} \|\Delta_h^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f\|_{L^\infty}.$$

- Si $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$, alors

$$B^{\sigma^{-1}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,\overline{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,M-1}(\mathbb{R}^d)$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $M > \overline{s}(\sigma^{-1})$ [S. Moura, 2007].

Table des matières

Espaces de Hölder et espaces $C^k(\mathbb{R}^d)$

Proposition

Soient $M \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$ et $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite admissible, tels que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} 2^{jk}\sigma_j < \infty.$$

On a

$$\Lambda^{\sigma,M}(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d).$$

Conséquence :

- Il est connu que $\Lambda^m(\mathbb{R}^d) \subset C^{m-1}(\mathbb{R}^d)$ et $\Lambda^m(\mathbb{R}^d) \not\subset C^m(\mathbb{R}^d)$ $(m \in \mathbb{N}^*)$,
- il vient $\Lambda^{\sigma^{(m)},m}(\mathbb{R}^d) \subset C^m(\mathbb{R}^d)$ avec $\sigma_j^{(m)} = 2^{-jm} j^{-1} \log(j)^{-(1+\epsilon)}$ $(j \in \mathbb{N}^*, \epsilon > 0)$.

Espaces de Hölder et espaces $C^k(\mathbb{R}^d)$

Proposition

Soient $M \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$ et $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite admissible, tels que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} 2^{jk}\sigma_j < \infty.$$

On a

$$\Lambda^{\sigma,M}(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d).$$

Conséquence :

- Il est connu que $\Lambda^m(\mathbb{R}^d) \subset C^{m-1}(\mathbb{R}^d)$ et $\Lambda^m(\mathbb{R}^d) \not\subset C^m(\mathbb{R}^d)$ $(m \in \mathbb{N}^*)$,
- il vient $\Lambda^{\sigma^{(m)},m}(\mathbb{R}^d) \subset C^m(\mathbb{R}^d)$ avec $\sigma_j^{(m)} = 2^{-jm}j^{-1}\log(j)^{-(1+\epsilon)}$ $(j \in \mathbb{N}^*, \epsilon > 0)$.

Espaces de Hölder et espaces $C^k(\mathbb{R}^d)$

Proposition

Soient $M \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$ et $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite admissible, tels que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} 2^{jk}\sigma_j < \infty.$$

On a

$$\Lambda^{\sigma,M}(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d).$$

Conséquence :

- Il est connu que $\Lambda^m(\mathbb{R}^d) \subset C^{m-1}(\mathbb{R}^d)$ et $\Lambda^m(\mathbb{R}^d) \not\subset C^m(\mathbb{R}^d)$ $(m \in \mathbb{N}^*)$,
- il vient $\Lambda^{\sigma^{(m)},m}(\mathbb{R}^d) \subset C^m(\mathbb{R}^d)$ avec $\sigma_j^{(m)} = 2^{-jm} j^{-1} \log(j)^{-(1+\epsilon)}$ $(j \in \mathbb{N}^*, \epsilon > 0)$.

Caractérisation des espaces par la convolution

On pose $\Phi_\delta(x) := \delta^{-d}\Phi(x/\delta)$ $(\delta > 0)$.

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soit $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite admissible telle que $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$. On a

$$B^{\sigma^{-1}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d) =$$

$$\left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \exists \Phi \in D(\mathbb{R}^d) \quad \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\sigma_j^{-1} \sup_{\delta \le 2^{-j}} \|f \star \Phi_\delta - f\|_{L^\infty} \right) < \infty \right\}.$$

Caractérisation des espaces par approximation polynomiale

On dénote par $\mathbb{P}_m$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $m \in \mathbb{N}_0$.

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soit $\sigma = (\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ une suite admissible telle que $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$. Si $M \in \mathbb{N}_0$ est tel que $M > \overline{s}(\sigma^{-1})$, alors

$$B^{\sigma^{-1}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,\overline{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d) =$$

$$\left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\sigma_j^{-1} \inf_{P \in \mathbb{P}_{M-1}} \|f - P\|_{L^\infty(B(x,2^{-j}))} \right) \right) < \infty \right\}.$$

Caractérisation des espaces en terme de dérivées

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soit σ une suite admissible et N, M deux nombres naturels tels que $N < \underline{s}(\sigma^{-1}) \leq \overline{s}(\sigma^{-1}) < M$. Alors il vient

$$B^{\sigma^{-1}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,\overline{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C^N(\mathbb{R}^d) : \sup_{|h|\leq 2^{-j}} \|\Delta_h^{M-N} D^\nu f\|_{L^\infty} \leq C\sigma_j 2^{jN} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0, |\nu| = N\}.$$

Caractérisation en terme de décomposition de Taylor

Définition

Une suite admissible $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est dite *forte d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$* si elle satisfait

$$\sum_{j=0}^{J} 2^{Nj}\sigma_j \leq C2^{NJ}\sigma_J, \tag{1}$$

$$\sum_{j=J}^{+\infty} 2^{(N-1)j}\sigma_j \leq C2^{(N-1)J}\sigma_J \tag{2}$$

pour tout $J \in \mathbb{N}_0$.

Exemple : la suite admissible $\sigma_j = 2^{-j\alpha}j^{\beta}$ ($\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$) est forte d'ordre $\lfloor\alpha\rfloor + 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, et n'est pas forte sinon.

Caractérisation en terme de décomposition de Taylor

Définition

Une suite admissible $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est dite *forte d'ordre* $N \in \mathbb{N}^*$ si elle satisfait

$$\sum_{j=0}^{J} 2^{Nj}\sigma_j \leq C2^{NJ}\sigma_J, \tag{1}$$

$$\sum_{j=J}^{+\infty} 2^{(N-1)j}\sigma_j \leq C2^{(N-1)J}\sigma_J \tag{2}$$

pour tout $J \in \mathbb{N}_0$.

Exemple : la suite admissible $\sigma_j = 2^{-j\alpha}j^{\beta}$ ($\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$) est forte d'ordre $\lfloor\alpha\rfloor + 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, et n'est pas forte sinon.

Caractérisation en terme de décomposition de Taylor

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soit σ une suite forte d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$f(x+h) = \sum_{|\nu| \leq N-1} D^\nu f(x) \frac{h^\nu}{|\nu|!} + R_{N-1}(x,h) \frac{|h|^{N-1}}{(N-1)!}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$$

où $|R_{N-1}(x,h)| \leq C\sigma_j 2^{j(N-1)}$, $\forall |h| \leq 2^{-j}$.

Réciproquement, si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C^{N-1}(\mathbb{R}^d)$ satisfait

$$f(x+h) = \sum_{|\nu| \leq N-1} D^\nu f(x) \frac{h^\nu}{|\nu|!} + R_{N-1}(x,h) \frac{|h|^{N-1}}{(N-1)!} \qquad \forall x,h \in \mathbb{R}^d$$

avec $\sup_{x,|h| \leq 2^{-j}} |R_{N-1}(x,h)| \leq C\sigma_j 2^{j(N-1)}$ $\forall j \in \mathbb{N}^*$, alors $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$.

Caractérisation en terme de décomposition de Taylor

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soit σ une suite forte d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$f(x+h) = \sum_{|\nu| \leq N-1} D^\nu f(x) \frac{h^\nu}{|\nu|!} + R_{N-1}(x,h) \frac{|h|^{N-1}}{(N-1)!}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$$

où $|R_{N-1}(x,h)| \leq C\sigma_j 2^{j(N-1)}$, $\forall |h| \leq 2^{-j}$.
Réciproquement, si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C^{N-1}(\mathbb{R}^d)$ satisfait

$$f(x+h) = \sum_{|\nu| \leq N-1} D^\nu f(x) \frac{h^\nu}{|\nu|!} + R_{N-1}(x,h) \frac{|h|^{N-1}}{(N-1)!} \qquad \forall x, h \in \mathbb{R}^d$$

avec $\sup_{x,|h| \leq 2^{-j}} |R_{N-1}(x,h)| \leq C\sigma_j 2^{j(N-1)}$ $\forall j \in \mathbb{N}^*$, alors $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$.

Caractérisation en terme de décomposition de Littlewood-Paley

Rappels :
Soit $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\hat{\varphi}(\xi) = 1 \quad \text{si} \quad |\xi| \leq \frac{1}{2}, \qquad \hat{\varphi}(\xi) = 0 \quad \text{si} \quad |\xi| \geq 1$$

et

$$\hat{\psi}(\xi) := \hat{\varphi}(\xi/2) - \hat{\varphi}(\xi).$$

On pose $S_j(f) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\mathcal{F}f)$ et $\Delta_j(f) := S_{j+1}(f) - S_j(f)$ pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Il vient

$$Id = S_0 + \Delta_0 + \Delta_1 + \dots \qquad (\text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)).$$

Caractérisation en terme de décomposition de Littlewood-Paley

Théorème

Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite admissible telle que $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$. Si

$$\|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq C\sigma_j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

alors $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$. Inversement, si $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$ et

$$N < \underline{s}(\sigma^{-1}) \leq \bar{s}(\sigma^{-1}) < N+2,$$

alors

$$\|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq C\sigma_j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 .$$

Caractérisation en terme de décomposition de Littlewood-Paley

Théorème

Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite admissible telle que $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$. Si

$$\|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq C\sigma_j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

alors $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$. Inversement, si $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$ et

$$N < \underline{s}(\sigma^{-1}) \leq \bar{s}(\sigma^{-1}) < N+2,$$

alors

$$\|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq C\sigma_j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0\,.$$

Caractérisation en terme de coefficients d'ondelettes

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soit σ une suite admissible telle que $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$.

1. Considérons les ondelettes de Daubechies. Si $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{cases} |C_k| \leq C & \forall k \in \mathbb{Z}^d \\ |c^i_{j,k}| \leq C\sigma_j & \forall j \in \mathbb{N}_0, \forall i \in \{1, \ldots, 2^d - 1\}, \forall k \in \mathbb{Z}^d. \end{cases} \quad (3)$$

   Si l'hypothèse $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$ est remplacée par le fait que σ soit forte d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$, alors le résultat reste vrai pour les ondelettes de Lemarié-Meyer.

2. Réciproquement, si $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ vérifie (3), alors $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$.

Caractérisation en terme de coefficients d'ondelettes

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soit σ une suite admissible telle que $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$.

1. Considérons les ondelettes de Daubechies. Si $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{cases} |C_k| \leq C & \forall k \in \mathbb{Z}^d \\ |c^i_{j,k}| \leq C\sigma_j & \forall j \in \mathbb{N}_0, \forall i \in \{1, \ldots, 2^d - 1\}, \forall k \in \mathbb{Z}^d. \end{cases} \tag{3}$$

   Si l'hypothèse $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$ est remplacée par le fait que σ soit forte d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$, alors le résultat reste vrai pour les ondelettes de Lemarié-Meyer.

2. Réciproquement, si $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ vérifie (3), alors $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$.

Caractérisation en terme de coefficients d'ondelettes

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soit σ une suite admissible telle que $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$.

1. Considérons les ondelettes de Daubechies. Si $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{cases} |C_k| \leq C & \forall k \in \mathbb{Z}^d \\ |c_{j,k}^i| \leq C\sigma_j & \forall j \in \mathbb{N}_0, \forall i \in \{1, \ldots, 2^d - 1\}, \forall k \in \mathbb{Z}^d. \end{cases} \tag{3}$$

   Si l'hypothèse $\underline{s}(\sigma^{-1}) > 0$ est remplacée par le fait que σ soit forte d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$, alors le résultat reste vrai pour les ondelettes de Lemarié-Meyer.

2. Réciproquement, si $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ vérifie (3), alors $f \in \Lambda^{\sigma,\bar{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d)$.

Interpolation réelle d'espaces de Sobolev

Rappels : Pour tout $t > 0$ et $a \in A_0 \cap A_1$, on pose

$$J(t, a) = \max\{\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\}.$$

Definition

Soient $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\psi = (\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ deux suites admissibles. On dit que a appartient à $[A_0, A_1]^{\star}_{\sigma,\psi,J}$ si $a = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ dans $A_0 + A_1$, où $u_j \in A_0 \cap A_1$ et $(\sigma_j J(\psi_j, u_j))_{j\in\mathbb{Z}} \in l^{\infty}(\mathbb{Z})$.

Pour tout $t > 0$ et $a \in A_0 + A_1$, on pose

$$K(t, a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1\}.$$

Definition

Soient $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\psi = (\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ deux suites admissibles. On dit que a appartient à $[A_0, A_1]^{\star}_{\sigma,\psi,K}$ si $a \in A_0 + A_1$ et $(\sigma_j K(\psi_j, a))_{j\in\mathbb{Z}} \in l^{\infty}(\mathbb{Z})$.

Interpolation réelle d'espaces de Sobolev

Rappels : Pour tout $t > 0$ et $a \in A_0 \cap A_1$, on pose

$$J(t, a) = \max\{\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\}.$$

Definition

Soient $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\psi = (\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ deux suites admissibles. On dit que a appartient à $[A_0, A_1]^\star_{\sigma,\psi,J}$ si $a = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ dans $A_0 + A_1$, où $u_j \in A_0 \cap A_1$ et $(\sigma_j J(\psi_j, u_j))_{j\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

Pour tout $t > 0$ et $a \in A_0 + A_1$, on pose

$$K(t, a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1\}.$$

Definition

Soient $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\psi = (\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ deux suites admissibles. On dit que a appartient à $[A_0, A_1]^\star_{\sigma,\psi,K}$ si $a \in A_0 + A_1$ et $(\sigma_j K(\psi_j, a))_{j\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

Interpolation réelle d'espaces de Sobolev

Rappels : Pour tout $t > 0$ et $a \in A_0 \cap A_1$, on pose

$$J(t,a) = \max\{\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\}.$$

Definition

Soient $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\psi = (\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ deux suites admissibles. On dit que a appartient à $[A_0, A_1]^\star_{\sigma,\psi,J}$ si $a = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ dans $A_0 + A_1$, où $u_j \in A_0 \cap A_1$ et $(\sigma_j J(\psi_j, u_j))_{j\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

Pour tout $t > 0$ et $a \in A_0 + A_1$, on pose

$$K(t,a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1\}.$$

Definition

Soient $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\psi = (\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ deux suites admissibles. On dit que a appartient à $[A_0, A_1]^\star_{\sigma,\psi,K}$ si $a \in A_0 + A_1$ et $(\sigma_j K(\psi_j, a))_{j\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

Interpolation réelle d'espaces de Sobolev

Rappels : Pour tout $t > 0$ et $a \in A_0 \cap A_1$, on pose

$$J(t,a) = \max\{\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\}.$$

Definition

Soient $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\psi = (\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ deux suites admissibles. On dit que a appartient à $[A_0, A_1]^\star_{\sigma,\psi,J}$ si $a = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ dans $A_0 + A_1$, où $u_j \in A_0 \cap A_1$ et $(\sigma_j J(\psi_j, u_j))_{j\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

Pour tout $t > 0$ et $a \in A_0 + A_1$, on pose

$$K(t,a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1\}.$$

Definition

Soient $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\psi = (\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ deux suites admissibles. On dit que a appartient à $[A_0, A_1]^\star_{\sigma,\psi,K}$ si $a \in A_0 + A_1$ et $(\sigma_j K(\psi_j, a))_{j\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

Interpolation réelle d'espaces de Sobolev

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soient $N, M \in \mathbb{N}_0$ et σ une suite admissible telle que

$$N < \underline{s}(\sigma^{-1}) \leq \overline{s}(\sigma^{-1}) < M.$$

On a

$$\Lambda^{\sigma,\overline{s}(\sigma^{-1})}(\mathbb{R}^d) = [W^\infty_N, W^\infty_M]^\star_{\theta,2^{j(M-N)},J} = [W^\infty_N, W^\infty_M]^\star_{\theta,2^{j(M-N)},K}$$

où θ est la suite admissible définie par

$$\theta_j = \begin{cases} 2^{jN}\sigma^{-1}_{-j} & \forall j \in -\mathbb{N}_0 \\ (\theta_{-j})^{-1} & \forall j \in \mathbb{N}^* . \end{cases}$$

Exposant de Hölder généralisé

Rappels : L'exposant de Hölder classique d'une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est défini par

$$H_f = \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d)\}.$$

Le sens provient de l'inclusion des espaces :

$$\alpha < \beta \Rightarrow \Lambda^\beta(\mathbb{R}^d) \subseteq \Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Définition

Une famille de suites admissibles $\sigma^{(\cdot)}$ est dite *décroissante* si $\alpha < \beta$ implique $\Lambda^{\sigma^{(\beta)},\beta}(\mathbb{R}^d) \subseteq \Lambda^{\sigma^{(\alpha)},\alpha}(\mathbb{R}^d)$.

Dans ce contexte, nous pouvons définir un **exposant de Hölder généralisé** d'une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ par

$$H_f^{\sigma^{(\cdot)}} = \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^{\sigma^{(\alpha)},\alpha}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Exposant de Hölder généralisé

Rappels : L'exposant de Hölder classique d'une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est défini par

$$H_f = \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d)\}.$$

Le sens provient de l'inclusion des espaces :

$$\alpha < \beta \Rightarrow \Lambda^\beta(\mathbb{R}^d) \subseteq \Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Définition

Une famille de suites admissibles $\sigma^{(\cdot)}$ est dite *décroissante* si $\alpha < \beta$ implique $\Lambda^{\sigma^{(\beta)},\beta}(\mathbb{R}^d) \subseteq \Lambda^{\sigma^{(\alpha)},\alpha}(\mathbb{R}^d)$.

Dans ce contexte, nous pouvons définir un **exposant de Hölder généralisé** d'une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ par

$$H_f^{\sigma^{(\cdot)}} = \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^{\sigma^{(\alpha)},\alpha}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Exposant de Hölder généralisé

Rappels : L'exposant de Hölder classique d'une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est défini par

$$H_f = \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d)\}.$$

Le sens provient de l'inclusion des espaces :

$$\alpha < \beta \Rightarrow \Lambda^\beta(\mathbb{R}^d) \subseteq \Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Définition

Une famille de suites admissibles $\sigma^{(\cdot)}$ est dite *décroissante* si $\alpha < \beta$ implique $\Lambda^{\sigma^{(\beta)},\beta}(\mathbb{R}^d) \subseteq \Lambda^{\sigma^{(\alpha)},\alpha}(\mathbb{R}^d)$.

Dans ce contexte, nous pouvons définir un **exposant de Hölder généralisé** d'une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ par

$$H_f^{\sigma^{(.)}} = \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^{\sigma^{(\alpha)},\alpha}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Exposant de Hölder généralisé

Proposition (D.K., S. Nicolay)

Une famille de suites admissibles $\sigma^{(\cdot)}$ est décroissante si les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et $\alpha, \beta > 0$ tels que $m \leq \alpha < \beta < m+1$, il existe C, $J > 0$ tels que
$$\sigma_j^{(\beta)} \leq C\sigma_j^{(\alpha)} \quad \forall j \geq J;$$
2. pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, il existe C, $J > 0$ tels que
$$2^{-jm} \leq C\sigma_j^{(m-\varepsilon)} \quad \forall j \geq J;$$

Exposant de Hölder généralisé

Proposition (D.K., S. Nicolay)

Une famille de suites admissibles $\sigma^{(\cdot)}$ est décroissante si les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et $\alpha, \beta > 0$ tels que $m \leq \alpha < \beta < m+1$, il existe $C, J > 0$ tels que
$$\sigma_j^{(\beta)} \leq C\sigma_j^{(\alpha)} \quad \forall j \geq J;$$
2. pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, il existe $C, J > 0$ tels que
$$2^{-jm} \leq C\sigma_j^{(m-\varepsilon)} \quad \forall j \geq J;$$

Exposant de Hölder généralisé

Proposition (suite)

3. pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, au moins une des conditions suivantes est satisfaite :
   1. - si $1 < 2^m d_1^{(m)}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \exists C, J > 0$ vérifiant
      $$2^{-jm}(2^m d_1^{(m)})^j \leq C\sigma_j^{(m-\varepsilon)} \quad \forall j \geq J;$$
      - si $1 > 2^m d_1^{(m)}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \exists C, J > 0$ vérifiant
      $$2^{-jm} \leq C\sigma_j^{(m-\varepsilon)} \quad \forall j \geq J;$$
      - si $1 = 2^m d_1^{(m)}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \exists C, J > 0$ vérifiant
      $$j2^{-jm} \leq C\sigma_j^{(m-\varepsilon)} \quad \forall j \geq J.$$

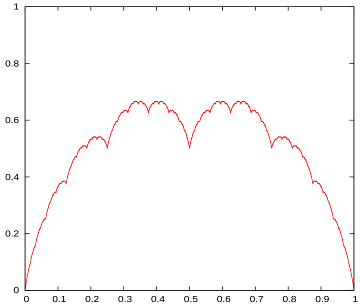
Exposant de Hölder généralisé

Proposition (suite)

3. pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, au moins une des conditions suivantes est satisfaite :
   2.
   - si $1 < 2^m d_0^{(m)}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $\exists C, J > 0$ vérifiant
   $$\sigma_j^{(m)} \leq C \sigma_j^{(m-\varepsilon)} \quad \forall j \geq J;$$
   - si $1 > 2^m d_0^{(m)}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $\exists C, J > 0$ vérifiant
   $$\sigma_j^{(m)} (2^m d_0^{(m)})^{-j} \leq C \sigma_j^{(m-\varepsilon)} \quad \forall j \geq J;$$
   - si $1 = 2^m d_0^{(m)}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $\exists C, J > 0$ vérifiant
   $$j \sigma_j^{(m)} \leq C \sigma_j^{(m-\varepsilon)} \quad \forall j \geq J.$$

Table des matières

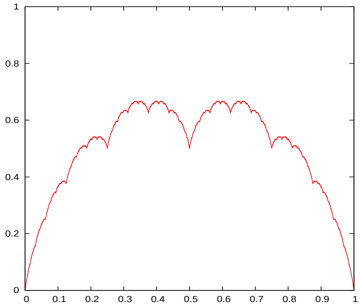
Fonction de Takagi



On a les résultats suivants :

- $T \in \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R})$ pour $\alpha \in]0,1[$,
- $T \notin \Lambda^{1}(\mathbb{R})$,
- $T \in \Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R})$ où $\sigma_j = 2^{-j} j$ $(j \in \mathbb{N}^*)$ et $\alpha \in]0,1[$.

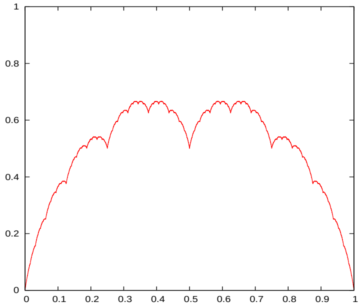
Fonction de Takagi



On a les résultats suivants :

- $T \in \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R})$ pour $\alpha \in]0,1[$,
- $T \notin \Lambda^{1}(\mathbb{R})$,
- $T \in \Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R})$ où $\sigma_j = 2^{-j}j$ $(j \in \mathbb{N}^*)$ et $\alpha \in]0,1[$.

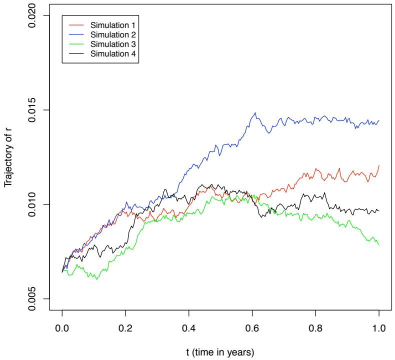
Fonction de Takagi



On a les résultats suivants :

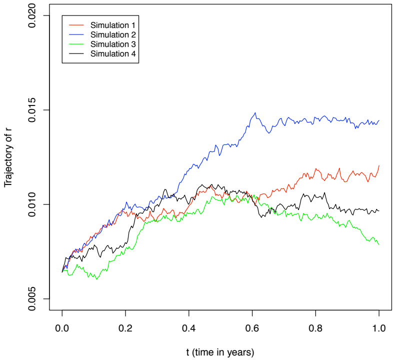
- $T \in \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R})$ pour $\alpha \in]0,1[$,
- $T \notin \Lambda^{1}(\mathbb{R})$,
- $T \in \Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R})$ où $\sigma_j = 2^{-j} j \; (j \in \mathbb{N}^*)$ et $\alpha \in]0,1[$.

Processus de Hull et White



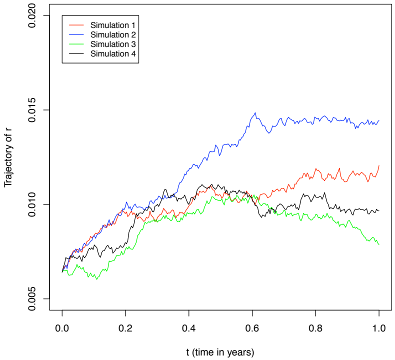
- Le processus s'écrit
  $r(t) = r(0)e^{-at} + e^{-at}a\int_0^t \theta(s)e^{as}ds + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW(s).$
- On a $r \in \Lambda^{\sigma,\alpha}$ avec $\sigma_j := (2^{-j})^{\frac{1}{2}}|\log|\log(2^{-j})||^{\frac{1}{2}}$ $(j \in \mathbb{N}^*)$ et $0 < \alpha < 1$.
- On a $r \notin \Lambda^{1/2}$.

Processus de Hull et White



- Le processus s'écrit $r(t) = r(0)e^{-at} + e^{-at}a\int_0^t \theta(s)e^{as}ds + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW(s)$.
- On a $r \in \Lambda^{\sigma,\alpha}$ avec $\sigma_j := (2^{-j})^{\frac{1}{2}} |\log|\log(2^{-j})||^{\frac{1}{2}}$ $(j \in \mathbb{N}^*)$ et $0 < \alpha < 1$.
- On a $r \notin \Lambda^{1/2}$.

Processus de Hull et White



- Le processus s'écrit
  $r(t) = r(0)e^{-at} + e^{-at}a\int_0^t \theta(s)e^{as}ds + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW(s)$.
- On a $r \in \Lambda^{\sigma,\alpha}$ avec $\sigma_j := (2^{-j})^{\frac{1}{2}}|\log|\log(2^{-j})||^{\frac{1}{2}}$ $(j \in \mathbb{N}^*)$ et $0 < \alpha < 1$.
- On a $r \notin \Lambda^{1/2}$.

Table des matières

Espace $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d)$

Définition

Soient $\alpha > 0$, $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ et $N = (N_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ deux suites admissibles. On définit l'*espace de Hölder-Zygmund généralisé* $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d) : \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sigma_j^{-1} \sup_{|h|\leq N_j^{-1}} \|\Delta_h^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f\|_{L^\infty} < \infty \right\}.$$

Remarques

1. On a $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,(2^j)_j}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ et $\Lambda^{\alpha}_{(2^{-j\alpha})_j,(2^j)_j}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$.
2. Si $\underline{N}_1 := \inf_{k\geq 0} \frac{N_{1+k}}{N_k} > 1$ et $\underline{s}(\sigma^{-1})\overline{s}(N)^{-1} > 0$, alors

$$B^{\sigma^{-1},N}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\overline{s}(\sigma^{-1})\underline{s}(N)^{-1}}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{M-1}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d).$$

3. La plupart des précédents résultats restent vrais pour ces espaces.

Espace $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d)$

Définition

Soient $\alpha > 0$, $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ et $N = (N_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ deux suites admissibles. On définit l'*espace de Hölder-Zygmund généralisé* $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sigma_j^{-1} \sup_{|h|\le N_j^{-1}} \|\Delta_h^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f\|_{L^\infty} < \infty \right\}.$$

Remarques

1. On a $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,(2^j)_j}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ et $\Lambda^{\alpha}_{(2^{-j\alpha})_j,(2^j)_j}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$.
2. Si $\underline{N}_1 := \inf_{k\ge 0} \frac{N_{1+k}}{N_k} > 1$ et $\underline{s}(\sigma^{-1})\overline{s}(N)^{-1} > 0$, alors
$$B^{\sigma^{-1},N}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\overline{s}(\sigma^{-1})\underline{s}(N)^{-1}}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{M-1}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d).$$
3. La plupart des précédents résultats restent vrais pour ces espaces.

Espace $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d)$

Définition

Soient $\alpha > 0$, $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ et $N = (N_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ deux suites admissibles. On définit l'*espace de Hölder-Zygmund généralisé* $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sigma_j^{-1} \sup_{|h|\leq N_j^{-1}} \|\Delta_h^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f\|_{L^\infty} < \infty \right\}.$$

Remarques

1. On a $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,(2^j)_j}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ et $\Lambda^{\alpha}_{(2^{-j\alpha})_j,(2^j)_j}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$.
2. Si $\underline{N}_1 := \inf_{k\geq 0} \frac{N_{1+k}}{N_k} > 1$ et $\underline{s}(\sigma^{-1})\overline{s}(N)^{-1} > 0$, alors
$$B^{\sigma^{-1},N}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\overline{s}(\sigma^{-1})\underline{s}(N)^{-1}}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{M-1}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d).$$
3. La plupart des précédents résultats restent vrais pour ces espaces.

Espace $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d)$

Définition

Soient $\alpha > 0$, $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ et $N = (N_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ deux suites admissibles. On définit l'*espace de Hölder-Zygmund généralisé* $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sigma_j^{-1} \sup_{|h|\leq N_j^{-1}} \|\Delta_h^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f\|_{L^\infty} < \infty \right\}.$$

Remarques

1. On a $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,(2^j)_j}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ et $\Lambda^{\alpha}_{(2^{-j\alpha})_j,(2^j)_j}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$.
2. Si $\underline{N}_1 := \inf_{k\geq 0} \frac{N_{1+k}}{N_k} > 1$ et $\underline{s}(\sigma^{-1})\overline{s}(N)^{-1} > 0$, alors

$$B^{\sigma^{-1},N}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\overline{s}(\sigma^{-1})\underline{s}(N)^{-1}}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{M-1}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d).$$

3. La plupart des précédents résultats restent vrais pour ces espaces.

Espace $\Lambda^{\alpha}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d)$

Exemple de résultat sur ces espaces (D.K., S. Nicolay)

Soient $L, M \in \mathbb{N}_0$ et σ, N deux suites admissibles telles que $\underline{N}_1 > 1$ et

$$L < \underline{s}(\sigma^{-1})\overline{s}(N)^{-1} \leq \overline{s}(\sigma^{-1})\underline{s}(N)^{-1} < M.$$

On a

$$B^{\sigma^{-1},N}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Lambda^{\overline{s}(\sigma^{-1})\underline{s}(N)^{-1}}_{\sigma,N}(\mathbb{R}^d) = [W^{\infty}_L, W^{\infty}_M]^{\star}_{\theta,\psi,J} = [W^{\infty}_L, W^{\infty}_M]^{\star}_{\theta,\psi,K}$$

où θ et ψ sont les suites admissibles définies par

$$\theta_j = \begin{cases} N_{-j}^{-L}\sigma_{-j}^{-1} & \forall j \in -\mathbb{N}_0, \\ (\theta_{-j})^{-1} = N_j^L \sigma_j & \forall j \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

$$\psi_j = \begin{cases} N_{-j}^{-(M-L)} & \forall j \in -\mathbb{N}_0, \\ (\psi_{-j})^{-1} = N_j^{M-L} & \forall j \in \mathbb{N}^* . \end{cases}$$

Table des matières

Définition des espaces

Définition

Soient $M \in \mathbb{N}_0$, σ et N deux suites admissibles, et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Une fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ appartient à l'espace $\Lambda^M_{\sigma,N}(x_0)$ s'il existe deux constantes $C, J > 0$ telles que

$$\inf_{P \in \mathbb{P}_M} \|f - P\|_{B(x_0, N_j^{-1})} \leq C\sigma_j \quad \forall j \geq J.$$

Dans le cas $N_j = 2^j$ ($j \in \mathbb{N}_0$), on note ces espaces $\Lambda^{\sigma,M}(x_0) = \Lambda^M_{\sigma,N}(x_0)$.

Lorsque $\sigma_j = 2^{-j\alpha}$, $N_j = 2^j$ et $M = \lfloor \alpha \rfloor$, alors ces espaces correspondent aux espaces de Hölder ponctuels classiques $\Lambda^\alpha(x_0)$.

Définition des espaces

Définition

Soient $M \in \mathbb{N}_0$, σ et N deux suites admissibles, et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Une fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ appartient à l'espace $\Lambda^M_{\sigma,N}(x_0)$ s'il existe deux constantes $C, J > 0$ telles que

$$\inf_{P \in \mathbb{P}_M} \|f - P\|_{B(x_0, N_j^{-1})} \leq C\sigma_j \quad \forall j \geq J.$$

Dans le cas $N_j = 2^j$ ($j \in \mathbb{N}_0$), on note ces espaces $\Lambda^{\sigma,M}(x_0) = \Lambda^M_{\sigma,N}(x_0)$.

Lorsque $\sigma_j = 2^{-j\alpha}$, $N_j = 2^j$ et $M = \lfloor \alpha \rfloor$, alors ces espaces correspondent aux espaces de Hölder ponctuels classiques $\Lambda^\alpha(x_0)$.

Table des matières

Caractérisation par les différences finies

Proposition (D.K., S. Nicolay)

Soient $M \in \mathbb{N}_0$, σ et N deux suites admissibles telles que $N_j \to +\infty$. Si $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction continue dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^d$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f \in \Lambda^M_{\sigma,N}(x_0)$,
2. il existe $C > 0$ et $J > 0$ tels que

$$\sup_{|h| \leq N_j^{-1}} \|\Delta_h^{M+1} f\|_{B_h(x_0, N_j^{-1})} \leq C\sigma_j \quad \forall j \geq J.$$

Décomposition de Taylor

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soient $M \in \mathbb{N}_0$, σ et N deux suites admissibles telles que $M < \underline{s}(\sigma^{-1})\overline{s}(N)^{-1}$ et $\underline{N}_1 > 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f \in \Lambda^M_{\sigma,N}(x_0)$,
2. il existe $C > 0$ et un polynôme P_{x_0} de degré inférieur ou égal à M tels que

$$\sup_{|h| \leq N_j^{-1}} |f(x_0+h) - P_{x_0}(h)| \leq C\sigma_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}_0 .$$

Pour x dans un voisinage de x_0, il vient

$$f(x) = \sum_{|\beta| \leq M} D^\beta f(x_0) \frac{(x-x_0)^\beta}{|\beta|!} + R(x-x_0),$$

où $\sup_{|h| \leq N_j^{-1}} |R(h)| \leq C\sigma_j$ (pour j suffisamment grand).

Décomposition de Taylor

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soient $M \in \mathbb{N}_0$, σ et N deux suites admissibles telles que $M < \underline{s}(\sigma^{-1})\overline{s}(N)^{-1}$ et $\underline{N}_1 > 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f \in \Lambda^M_{\sigma,N}(x_0)$,
2. il existe $C > 0$ et un polynôme P_{x_0} de degré inférieur ou égal à M tels que

$$\sup_{|h| \leq N_j^{-1}} |f(x_0 + h) - P_{x_0}(h)| \leq C\sigma_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}_0 .$$

Pour x dans un voisinage de x_0, il vient

$$f(x) = \sum_{|\beta| \leq M} D^\beta f(x_0) \frac{(x - x_0)^\beta}{|\beta|!} + R(x - x_0),$$

où $\sup_{|h| \leq N_j^{-1}} |R(h)| \leq C\sigma_j$ (pour j suffisamment grand).

Caractérisation par les coefficients d'ondelettes - Rappel

- On considère les ondelettes de Daubechies.
- Un cube dyadique d'échelle $j \in \mathbb{N}_0$ est un cube pouvant s'écrire

$$\lambda = \prod_{i=1}^{d} \left[\frac{k_i}{2^j}, \frac{k_i+1}{2^j}\right[\qquad (k = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d).$$

- Soit $\lambda = \lambda(i,j,k) = \frac{k}{2^j} + \frac{i}{2^{j+1}} + \left[0, \frac{1}{2^{j+1}}\right)^d$ le cube dyadique associé au coefficient d'ondelette $c_\lambda = c^i_{j,k}$.
- Les *coefficients dominants* sont définis par $d_\lambda = \sup_{\lambda' \subseteq \lambda} |c_{\lambda'}|$.
- Deux cubes dyadiques λ_1 et λ_2 sont dits adjacents s'ils ont même échelle et si $\mathrm{dist}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$.
- Soit $\lambda_j(x_0)$ le cube dyadique de côté 2^{-j} contenant x_0 et soit 3λ l'ensemble des 3^d cubes dyadiques de côté λ ; alors on pose

$$d_j(x_0) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda_j(x_0))} d_{\lambda'}.$$

Caractérisation par les coefficients d'ondelettes - Rappel

- On considère les ondelettes de Daubechies.
- Un cube dyadique d'échelle $j \in \mathbb{N}_0$ est un cube pouvant s'écrire

$$\lambda = \prod_{i=1}^{d} \left[\frac{k_i}{2^j}, \frac{k_i + 1}{2^j} \right[\qquad (k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d).$$

- Soit $\lambda = \lambda(i, j, k) = \frac{k}{2^j} + \frac{i}{2^{j+1}} + [0, \frac{1}{2^{j+1}})^d$ le cube dyadique associé au coefficient d'ondelette $c_\lambda = c^i_{j,k}$.
- Les *coefficients dominants* sont définis par $d_\lambda = \sup_{\lambda' \subseteq \lambda} |c_{\lambda'}|$.
- Deux cubes dyadiques λ_1 et λ_2 sont dits adjacents s'ils ont même échelle et si $\mathrm{dist}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$.
- Soit $\lambda_j(x_0)$ le cube dyadique de côté 2^{-j} contenant x_0 et soit 3λ l'ensemble des 3^d cubes dyadiques de côté λ ; alors on pose

$$d_j(x_0) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda_j(x_0))} d_{\lambda'}.$$

Caractérisation par les coefficients d'ondelettes - Rappel

- On considère les ondelettes de Daubechies.
- Un cube dyadique d'échelle $j \in \mathbb{N}_0$ est un cube pouvant s'écrire

$$\lambda = \prod_{i=1}^{d} \left[\frac{k_i}{2^j}, \frac{k_i + 1}{2^j} \right[\qquad (k = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d).$$

- Soit $\lambda = \lambda(i, j, k) = \frac{k}{2^j} + \frac{i}{2^{j+1}} + \left[0, \frac{1}{2^{j+1}}\right)^d$ le cube dyadique associé au coefficient d'ondelette $c_\lambda = c^i_{j,k}$.
- Les *coefficients dominants* sont définis par $d_\lambda = \sup_{\lambda' \subseteq \lambda} |c_{\lambda'}|$.
- Deux cubes dyadiques λ_1 et λ_2 sont dits adjacents s'ils ont même échelle et si $\mathrm{dist}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$.
- Soit $\lambda_j(x_0)$ le cube dyadique de côté 2^{-j} contenant x_0 et soit 3λ l'ensemble des 3^d cubes dyadiques de côté λ ; alors on pose

$$d_j(x_0) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda_j(x_0))} d_{\lambda'}.$$

Caractérisation par les coefficients d’ondelettes - Rappel

- On considère les ondelettes de Daubechies.
- Un cube dyadique d’échelle $j \in \mathbb{N}_0$ est un cube pouvant s’écrire

$$\lambda = \prod_{i=1}^{d} \left[\frac{k_i}{2^j}, \frac{k_i + 1}{2^j} \right[\qquad (k = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d).$$

- Soit $\lambda = \lambda(i, j, k) = \frac{k}{2^j} + \frac{i}{2^{j+1}} + \left[0, \frac{1}{2^{j+1}}\right)^d$ le cube dyadique associé au coefficient d’ondelette $c_\lambda = c^i_{j,k}$.
- Les *coefficients dominants* sont définis par $d_\lambda = \sup_{\lambda' \subseteq \lambda} |c_{\lambda'}|$.
- Deux cubes dyadiques λ_1 et λ_2 sont dits adjacents s’ils ont même échelle et si $\mathrm{dist}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$.
- Soit $\lambda_j(x_0)$ le cube dyadique de côté 2^{-j} contenant x_0 et soit 3λ l’ensemble des 3^d cubes dyadiques de côté λ ; alors on pose

$$d_j(x_0) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda_j(x_0))} d_{\lambda'}.$$

Caractérisation par les coefficients d'ondelettes - Rappel

- On considère les ondelettes de Daubechies.
- Un cube dyadique d'échelle $j \in \mathbb{N}_0$ est un cube pouvant s'écrire

$$\lambda = \prod_{i=1}^{d} \left[\frac{k_i}{2^j}, \frac{k_i+1}{2^j} \right[\qquad (k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d).$$

- Soit $\lambda = \lambda(i,j,k) = \frac{k}{2^j} + \frac{i}{2^{j+1}} + \left[0, \frac{1}{2^{j+1}}\right)^d$ le cube dyadique associé au coefficient d'ondelette $c_\lambda = c^i_{j,k}$.
- Les *coefficients dominants* sont définis par $d_\lambda = \sup_{\lambda' \subseteq \lambda} |c_{\lambda'}|$.
- Deux cubes dyadiques λ_1 et λ_2 sont dits adjacents s'ils ont même échelle et si $\operatorname{dist}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$.
- Soit $\lambda_j(x_0)$ le cube dyadique de côté 2^{-j} contenant x_0 et soit 3λ l'ensemble des 3^d cubes dyadiques de côté λ ; alors on pose

$$d_j(x_0) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda_j(x_0))} d_{\lambda'}.$$

Caractérisation par les coefficients d'ondelettes - Rappel

- On considère les ondelettes de Daubechies.
- Un cube dyadique d'échelle $j \in \mathbb{N}_0$ est un cube pouvant s'écrire

$$\lambda = \prod_{i=1}^{d} \left[\frac{k_i}{2^j}, \frac{k_i+1}{2^j} \right[\qquad (k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d).$$

- Soit $\lambda = \lambda(i,j,k) = \frac{k}{2^j} + \frac{i}{2^{j+1}} + \left[0, \frac{1}{2^{j+1}}\right)^d$ le cube dyadique associé au coefficient d'ondelette $c_\lambda = c^i_{j,k}$.
- Les *coefficients dominants* sont définis par $d_\lambda = \sup_{\lambda' \subseteq \lambda} |c_{\lambda'}|$.
- Deux cubes dyadiques λ_1 et λ_2 sont dits adjacents s'ils ont même échelle et si $\operatorname{dist}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$.
- Soit $\lambda_j(x_0)$ le cube dyadique de côté 2^{-j} contenant x_0 et soit 3λ l'ensemble des 3^d cubes dyadiques de côté λ ; alors on pose

$$d_j(x_0) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda_j(x_0))} d_{\lambda'}.$$

Caractérisation par les coefficients d'ondelettes

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soient $M \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et σ une suite admissible. Si $f \in \Lambda^{\sigma,M}(x_0)$, alors il existe $C > 0$ et $J \in \mathbb{N}_0$ tels que

$$d_j(x_0) \leq C\sigma_j \qquad \forall j \geq J. \tag{4}$$

Réciproquement, supposons que $\sigma_j \to 0$ si $j \to +\infty$. Si f est uniformément Hölder et si (4) est satisfait, alors $f \in \Lambda^{\sigma',M}(x_0)$ où σ' est la nouvelle suite admissible définie par $\sigma'_j = \sigma_j |\log_2(\sigma_j)|$ ($j \in \mathbb{N}_0$) et $M \in \mathbb{N}_0$ vérifie $M + 1 > \overline{s}(\sigma^{-1})$.

Caractérisation par les coefficients d'ondelettes

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soient $M \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et σ une suite admissible. Si $f \in \Lambda^{\sigma,M}(x_0)$, alors il existe $C > 0$ et $J \in \mathbb{N}_0$ tels que

$$d_j(x_0) \leq C\sigma_j \qquad \forall j \geq J. \tag{4}$$

Réciproquement, supposons que $\sigma_j \to 0$ si $j \to +\infty$. Si f est uniformément Hölder et si (4) est satisfait, alors $f \in \Lambda^{\sigma',M}(x_0)$ où σ' est la nouvelle suite admissible définie par $\sigma'_j = \sigma_j |\log_2(\sigma_j)|$ ($j \in \mathbb{N}_0$) et $M \in \mathbb{N}_0$ vérifie $M + 1 > \overline{s}(\sigma^{-1})$.

Caractérisation par la convolution

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soient $M \in \mathbb{N}_0$ et σ une suite admissible. Si $f \in \Lambda^{\sigma,M}(x_0)$, alors il existe une fonction $\Phi \in D(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\sup_{k \geq j} \|f - f \star \Phi_{2^{-k}}\|_{B(x_0,2^{-j})} \leq C\sigma_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 . \tag{5}$$

Réciproquement, supposons que $\sigma \to 0$. Si la fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfait (5) et

$$\sup_{j \in \mathbb{N}_0} \left(2^{\alpha j} \sup_{k \geq j} \|f \star \Phi_{2^{-k}} - f\|_{L^\infty} \right) < +\infty$$

pour un certain $\alpha > 0$, alors $f \in \Lambda^{\sigma,M}(x_0)$ pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $M + 1 > \bar{s}(\sigma^{-1})$.

Caractérisation par la convolution

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Soient $M \in \mathbb{N}_0$ et σ une suite admissible. Si $f \in \Lambda^{\sigma,M}(x_0)$, alors il existe une fonction $\Phi \in D(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\sup_{k \geq j} \|f - f \star \Phi_{2^{-k}}\|_{B(x_0, 2^{-j})} \leq C\sigma_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{5}$$

Réciproquement, supposons que $\sigma \to 0$. Si la fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfait (5) et

$$\sup_{j \in \mathbb{N}_0} \left(2^{\alpha j} \sup_{k \geq j} \|f \star \Phi_{2^{-k}} - f\|_{L^\infty} \right) < +\infty$$

pour un certain $\alpha > 0$, alors $f \in \Lambda^{\sigma,M}(x_0)$ pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $M + 1 > \bar{s}(\sigma^{-1})$.

Exposant de Hölder ponctuel généralisé I

Définition

L'*exposant de Hölder ponctuel en* x_0 d'une fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est défini par

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^\alpha(x_0)\}.$$

Le sens provient de l'inclusion des espaces :

$$\alpha < \beta \Rightarrow \Lambda^\beta(x_0) \subseteq \Lambda^\alpha(x_0).$$

Exposant de Hölder ponctuel généralisé II

Définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Une famille de suites admissibles $\sigma^{(\cdot)}$ est dite x_0-*décroissante* si $\alpha < \beta$ implique $\Lambda^{\sigma^{(\beta)},\lfloor\beta\rfloor}(x_0) \subseteq \Lambda^{\sigma^{(\alpha)},\lfloor\alpha\rfloor}(x_0)$.

Définition

Soit $\sigma^{(\cdot)}$ une famille de suites admissibles x_0-décroissante. L'*exposant de Hölder généralisé en x_0 associé à $\sigma^{(\cdot)}$* d'une fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est défini par

$$h_f^{\sigma^{(\cdot)}}(x_0) = \sup\left\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^{\sigma^{(\alpha)},\lfloor\alpha\rfloor}(x_0)\right\}.$$

Exposant de Hölder ponctuel généralisé II

Définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Une famille de suites admissibles $\sigma^{(.)}$ est dite x_0-*décroissante* si $\alpha < \beta$ implique $\Lambda^{\sigma^{(\beta)},\lfloor\beta\rfloor}(x_0) \subseteq \Lambda^{\sigma^{(\alpha)},\lfloor\alpha\rfloor}(x_0)$.

Définition

Soit $\sigma^{(.)}$ une famille de suites admissibles x_0-décroissante. L'*exposant de Hölder généralisé en x_0 associé à $\sigma^{(.)}$* d'une fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est défini par

$$h_f^{\sigma^{(.)}}(x_0) = \sup\left\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^{\sigma^{(\alpha)},\lfloor\alpha\rfloor}(x_0)\right\}.$$

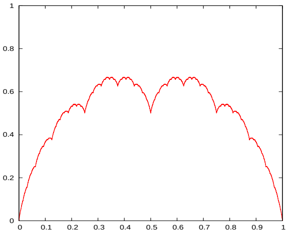
Exposant de Hölder ponctuel généralisé III

Théorème (D.K., S. Nicolay)

Sous les **même conditions** sur $\sigma^{(\cdot)}$ que celles fournies dans le résultat uniforme, la famille $\sigma^{(\cdot)}$ de suites admissibles est x_0-décroissante.

Table des matières

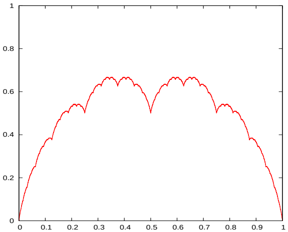
Retour sur la fonction de Takagi



On a les résultats suivants :

- $T \in \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R})$, $T \notin \Lambda^{1}(\mathbb{R})$, $T \in \Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R})$ où $\sigma_j = 2^{-j}j$ ($j \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in]0,1[$).
- Il existe des points $x \in [0,1]$ appelés *points lents* tels que $T \in \Lambda^{\alpha,(2^{-j})_j}(x)$ ($\alpha \in]0,1[$).
- Nous pouvons modifier la suite des espaces $\Lambda^{\alpha}(\mathbb{R})$ ($\alpha > 0$) en considérant $\sigma_j = 2^{-j\alpha}j$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$. On peut démontrer que la nouvelle suite d'espaces est emboitée et vérifie $T \in \Lambda^{\sigma,1}(\mathbb{R})$.

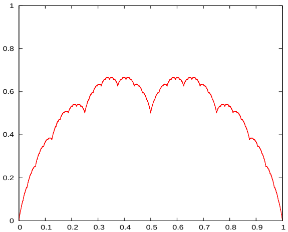
Retour sur la fonction de Takagi



On a les résultats suivants :

- $T \in \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R})$, $T \notin \Lambda^{1}(\mathbb{R})$, $T \in \Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R})$ où $\sigma_j = 2^{-j}j$ ($j \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in]0,1[$).
- Il existe des points $x \in [0,1]$ appelés *points lents* tels que $T \in \Lambda^{\alpha,(2^{-j})_j}(x)$ ($\alpha \in]0,1[$).
- Nous pouvons modifier la suite des espaces $\Lambda^{\alpha}(\mathbb{R})$ ($\alpha > 0$) en considérant $\sigma_j = 2^{-j\alpha}j$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$. On peut démontrer que la nouvelle suite d'espaces est emboitée et vérifie $T \in \Lambda^{\sigma,1}(\mathbb{R})$.

Retour sur la fonction de Takagi



On a les résultats suivants :

- $T \in \Lambda^{\alpha}(\mathbb{R})$, $T \notin \Lambda^{1}(\mathbb{R})$, $T \in \Lambda^{\sigma,\alpha}(\mathbb{R})$ où $\sigma_j = 2^{-j}j$ ($j \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in]0,1[$).
- Il existe des points $x \in [0,1]$ appelés *points lents* tels que $T \in \Lambda^{\alpha,(2^{-j})_j}(x)$ ($\alpha \in]0,1[$).
- Nous pouvons modifier la suite des espaces $\Lambda^{\alpha}(\mathbb{R})$ ($\alpha > 0$) en considérant $\sigma_j = 2^{-j\alpha}j$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$. On peut démontrer que la nouvelle suite d'espaces est emboitée et vérifie $T \in \Lambda^{\sigma,1}(\mathbb{R})$.

Bibliographie I

W. Farkas and H.-G. Leopold.
Characterisations of function spaces of generalised smoothness.
Annali Di Matematica Pura Ed Applicata, 185 :1–62, 2006.

Y. Heurteaux.
Weierstrass functions with random phases.
Transactions of the American Mathematical Society, 2003.

Y. Heurteaux.
Weierstrass functions in Zygmund's class.
Proceedings of the American Mathematical Society, 133(9), 2005.

S. Jaffard.
Wavelet Techniques in Multifractal Analysis.
In *Fractal Geometry and Applications : Multifractals, probability and statistical mechanics, applications*, volume 72. American Mathematical Society, 2004.

Bibliographie II

S. Jaffard.
Wavelet Techniques for Pointwise Regularity.
Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 15 :3–33, 2006.

S. Jaffard and Y. Meyer.
Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions.
Memoirs of the American Mathematical Society, 1996.

D. Kreit and S. Nicolay.
Some characterizations of generalized Hölder spaces.
Mathematische Nachrichten, 285 :2157–2172, 2012.

D. Kreit and S. Nicolay.
Characterizations of the elements of generalized Hölder-Zygmund spaces by means of their representation.
Journal of Approximation Theory, 172 :23–36, 2013.

Bibliographie III

D. Kreit and S. Nicolay.
Generalized pointwise Hölder spaces.
ArXiv e-prints :1307.3140, 2013.

S. D. Moura.
On some characterizations of Besov spaces of generalized smoothness.
Mathematatische Nachrichten, 280, 2007.

Merci de votre attention.