trajectoires des points invariablement liés à la droite concourent, à chaque instant du déplacement, au centre de courbure de S.

Les éléments de la théorie du mouvement d'une figure plane, invariable dans un plan, rendent la proposition intuitive (*). »

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 99.

Trouver une courbe telle, que la partie MT *de la tangente, comprise entre le point de contact et l'axe des abscisses, soit égale à l'abscisse* OP *du point de contact.* (H. Brocard.)

L'équation différentielle de la courbe est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Comme elle est homogène, on doit poser $\frac{y}{x} = z$, ce qui la transforme en la suivante :

$$\frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{1-z^2}\,(1+\sqrt{1-z^2})\,dz}{z^3}.$$

Les variables sont séparées, et l'intégration donne

$$\mathrm{l}\frac{x}{a} = -\frac{1}{2z^2} - \mathrm{l}z + \int \frac{dz}{z^3\sqrt{1-z^2}} - \int \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}} \quad . \quad (2)$$

(*) Voir la Note de la page 251. (E. C.)

En général,

$$\int \frac{z^m}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = -\frac{z^{m-1}\sqrt{1-z^2}}{m} + \frac{(m-1)}{m}\int \frac{z^{m-2}dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Changeons m en $m+2$; nous aurons donc

$$\int \frac{z^m dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{z^{m+1}\sqrt{1-z^2}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\int \frac{z^{m+2}dz}{\sqrt{1-z^2}} \ (^*).$$

En outre,

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}} = -\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2}-1}\right).$$

Si l'on fait $m = -3$, et que l'on substitue dans l'équation (2), il vient, après des simplifications évidentes,

$$\mathrm{l}\,\frac{x^2 z^3}{a^2(1+\sqrt{1-z^2})} = -\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Remplaçant z par $\frac{y}{x}$, on trouve, enfin, pour intégrale générale, l'équation

$$\frac{a^2(x+\sqrt{x^2-y^2})}{y^3} = e^{\frac{x(x+\sqrt{x^2-y^2})}{y^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

qui représente une courbe dont on peut résumer, ainsi qu'il suit, les diverses particularités.

La courbe admet l'origine pour centre, et les axes des coordonnées pour axes de symétrie.

(*) Dans l'équation (2), l'ensemble des deux derniers termes est

$$\int \frac{dz}{z^3}\sqrt{1-z^2} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}}.$$

(E. C.)

L'ordonnée y ne surpasse pas l'abscisse x. Pour $y=x$, on a $\pm x = \pm y = \frac{a}{\sqrt{e}}$. Les quatre points A, B, C, D, qui répondent à ces valeurs, se trouvent à l'intersection d'une circonférence ayant l'origine pour centre et $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$ pour rayon, avec les bissectrices des angles formés par les axes. En ces points, $\frac{dy}{dx}=\infty$ [équation (1)] : ce sont des points d'arrêt, d'où partent ensuite quatre branches égales, asymptotes à l'axe des x positifs et des x négatifs.

G. Latars,
professeur à l'École régimentaire du Génie, à Grenoble.

Note du Rédacteur. — Si, dans l'équation (1), on suppose

$$y = x\sin\theta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

on trouve

$$\frac{dx}{x} = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}d\theta = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}d\theta + \frac{d\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}.$$

La dernière fraction équivaut à

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)d\theta + \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}d\theta.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{l}\frac{x}{a} = -2\,\mathrm{l}\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} - \frac{1}{2(1-\cos\theta)},$$

ou

$$\frac{\frac{x}{a}\sin^2\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}} = e^{-\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}},$$

ou enfin

$$x = a\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}}{\sin^2\frac{1}{2}\theta}\cdot e^{-\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}}. \quad \ldots \quad \text{(B)}$$

L'ensemble des formules (A), (B) représente toutes les courbes demandées. Bien entendu, ces courbes sont homothétiques, relativement à l'origine.

N. B. — Nous avons refait, plusieurs fois, le calcul précédent. Quant aux équations (3), (4), elles sont contradictoires.

QUESTIONS PROPOSÉES.

418. On donne une droite D, dont l'équation, par rapport à deux axes rectangulaires, est

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1.$$

On considère les différentes coniques qui, ayant pour axes Ox et Oy, sont normales à la droite D. Chacune d'elles rencontre la droite en deux points. En ces points, on mène les tangentes à la conique.

Trouver l'équation du lieu du point de concours des tangentes. Démontrer : 1° que ce lieu est une parabole (*); 2° que la distance du foyer au sommet de cette parabole est le quart de la distance du point O à la droite D.

Construire géométriquement l'axe et le sommet de la parabole.

(École polytechnique. — Concours de 1878.)

419. On donne une conique *et* deux points fixes A *et* B sur cette conique. Une circonférence quelconque, passant par les deux

(*) Cet énoncé pèche par excès. (E. C.)