

Article

Solutions des questions proposées.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance mathématique - 4 | Sur une transformation de séries numériques. Sur la transformation harmo...

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

trajectoires des points invariablement liés à la droite concourent, à chaque instant du déplacement, au centre de courbure de S.

Les éléments de la théorie du mouvement d'une figure plane, invariable dans un plan, rendent la proposition intuitive (*). »



SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 99.

Trouver une courbe telle, que la partie MT de la tangente, comprise entre le point de contact et l'axe des abscisses, soit égale à l'abscisse OP du point de contact. (H. BROCARD.)

L'équation différentielle de la courbe est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \dots \dots \dots (1)$$

Comme elle est homogène, on doit poser $\frac{y}{x} = z$, ce qui la transforme en la suivante :

$$\frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{1 - z^2} (1 + \sqrt{1 - z^2}) dz}{z^3}$$

Les variables sont séparées, et l'intégration donne

$$1 - \frac{x}{a} = -\frac{1}{2z^2} - \ln z + \int \frac{dz}{z^3 \sqrt{1 - z^2}} - \int \frac{dz}{z \sqrt{1 - z^2}} \dots \dots (2)$$

(*) Voir la Note de la page 231.

(E. C.)

En général,

$$\int \frac{z^m}{\sqrt{1-z^2}} dz = -\frac{z^{m-1}\sqrt{1-z^2}}{m} + \frac{(m-1)}{m} \int \frac{z^{m-2} dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Changeons m en $m+2$; nous aurons donc

$$\int \frac{z^m dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{z^{m+1}\sqrt{1-z^2}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1} \int \frac{z^{m+2} dz}{\sqrt{1-z^2}} (*).$$

En outre,

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}} = -1 \left(\frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1} \right).$$

Si l'on fait $m = -5$, et que l'on substitue dans l'équation (2), il vient, après des simplifications évidentes,

$$1 \frac{x^2 z^5}{a^2 (1 + \sqrt{1-z^2})} = -\frac{1 + \sqrt{1-z^2}}{z} \dots \dots (5)$$

Remplaçant z par $\frac{y}{x}$, on trouve, enfin, pour intégrale générale, l'équation

$$\frac{a^2 (x + \sqrt{x^2 - y^2})}{y^5} = e^{\frac{x(x + \sqrt{x^2 - y^2})}{y^2}} \dots \dots (4)$$

qui représente une courbe dont on peut résumer, ainsi qu'il suit, les diverses particularités.

La courbe admet l'origine pour centre, et les axes des coordonnées pour axes de symétrie.

(*) Dans l'équation (2), l'ensemble des deux derniers termes est

$$\int \frac{dz}{z^5 \sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}}.$$

(E. C.)

L'ordonnée y ne surpasse pas l'abscisse x . Pour $y = x$, on a $\pm x = \pm y = \frac{a}{\sqrt{e}}$. Les quatre points A, B, C, D, qui répondent à ces valeurs, se trouvent à l'intersection d'une circonférence ayant l'origine pour centre et $\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{e}}$ pour rayon, avec les bissectrices des angles formés par les axes. En ces points, $\frac{dy}{dx} = \infty$ [équation (1)] : ce sont des points d'arrêt, d'où partent ensuite quatre branches égales, asymptotes à l'axe des x positifs et des x négatifs.

G. LATARS,

professeur à l'École régimentaire du Génie, à Grenoble.

NOTE DU RÉDACTEUR. — Si, dans l'équation (1), on suppose

$$y = x \sin \theta, \dots \dots \dots (A)$$

on trouve

$$\frac{dx}{x} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} d\theta = -\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} d\theta + \frac{d\theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}.$$

La dernière fraction équivaut à

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right) d\theta + \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2} d\theta.$$

Par conséquent,

$$1 \frac{x}{a} = -2 \int \sin \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} - \frac{1}{2(1 - \cos \theta)},$$

ou

$$\frac{\frac{x}{a} \sin^2 \frac{1}{2} \theta}{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta}} = e^{-\frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2} \theta}},$$

ou enfin

$$x = a \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta}}{\sin^2 \frac{1}{2} \theta} \cdot e^{-\frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2} \theta}} \dots \dots \dots (B)$$

L'ensemble des formules (A), (B) représente toutes les courbes demandées. Bien entendu, ces courbes sont homothétiques, relativement à l'origine.

N. B. — Nous avons refait, plusieurs fois, le calcul précédent. Quant aux équations (5), (4), elles sont contradictoires.

QUESTIONS PROPOSÉES.

418. On donne une droite **D**, dont l'équation, par rapport à deux axes rectangulaires, est

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

On considère les différentes coniques qui, ayant pour axes **Ox** et **Oy**, sont normales à la droite **D**. Chacune d'elles rencontre la droite en deux points. En ces points, on mène les tangentes à la conique.

Trouver l'équation du lieu du point de concours des tangentes. Démontrer : 1° que ce lieu est une parabole (*); 2° que la distance du foyer au sommet de cette parabole est le quart de la distance du point **O** à la droite **D**.

Construire géométriquement l'axe et le sommet de la parabole.

(École polytechnique. — Concours de 1878.)

419. On donne une conique *et* deux points fixes **A** *et* **B** sur cette conique. Une circonférence quelconque, passant par les deux

(*) Cet énoncé pêche par excès.