Une généralisation du triangle de Pascal

Travail en collaboration avec Julien Leroy et Michel Rigo

Manon Stipulanti [1]

Séminaire de Mathématiques Discrètes

22 mars 2016

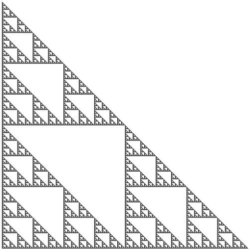
1. Supportée par une bourse FRIA.

Table des matières

Table des matières

Triangle de Pascal et triangle de Sierpiński

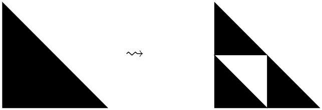
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1



Coefficients binomiaux classiques :

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$$

Construction du triangle de Sierpiński :



Coefficient binomial de mots finis

Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de deux mots finis u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît dans u en tant que sous-suite.

Exemple : $u = 101001 = u_1 u_2 \cdots u_6$ et $v = 101$

$$\binom{101001}{101} = 6$$

car

$$u_1u_2u_3 = u_1u_2u_6 = u_1u_4u_6 = u_1u_5u_6 = u_3u_4u_6 = u_3u_5u_6 = 101$$

Remarque : Généralisation des coefficients binomiaux d'entiers : si l'alphabet contient une seule lettre $\{a\}$

$$\binom{a^m}{a^k} = \binom{m}{k} \quad \forall\, m, k \in \mathbb{N}$$

Idée : S'intéresser au triangle de Pascal et au triangle de Sierpiński en considérant les coefficients binomiaux de mots
$\rightsquigarrow$ Sur quel alphabet ? Quels mots ?

Définition :

- $\mathrm{rep}_2(n)$: représentation gloutonne de $n \in \mathbb{N}_0$ en base 2 qui commence par 1
- $\mathrm{rep}_2(0) := \varepsilon$ où ε est le mot vide
- $L_n = (\{\varepsilon\} \cup 1\{0,1\}^*) \cap \{0,1\}^{\leq n}\ \forall n \geq 0$
  $\#L_n = 2^n\ \forall n \geq 0$

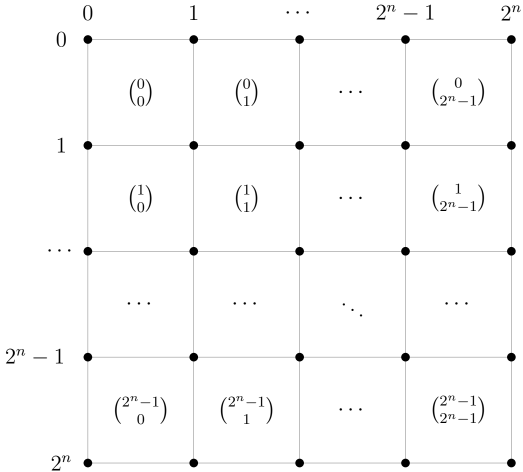
$\rightsquigarrow$ Sur quel alphabet ? $\{0,1\}$

$\rightsquigarrow$ Quels mots ? Les représentations en base 2 triées selon l'ordre généalogique (par longueur, puis selon l'ordre du dictionnaire)

$u \backslash v$	ε	1	10	11	100	101	110	111
ε	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	0	0	0	0	0
11	1	2	0	1	0	0	0	0
100	1	1	2	0	1	0	0	0
101	1	2	1	1	0	1	0	0
110	1	2	2	1	0	0	1	0
111	1	3	0	3	0	0	0	1

En orange : le triangle de Pascal classique

- Grille : intersection de $\mathbb{N}^2$ avec la région $[0, 2^n] \times [0, 2^n]$



$\mathbb{N}^2 \cap [0, 2^n]^2$

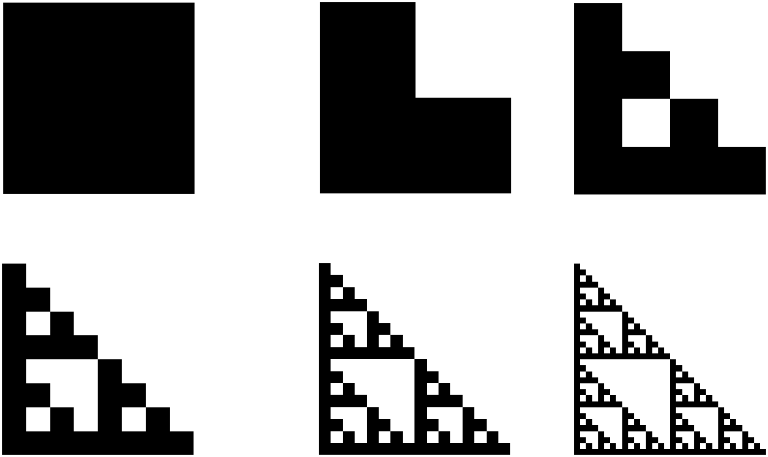
- Colorier la grille : les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal classique

$$\left(\binom{m}{k} \bmod 2\right)_{0\leq m,k<2^n}$$

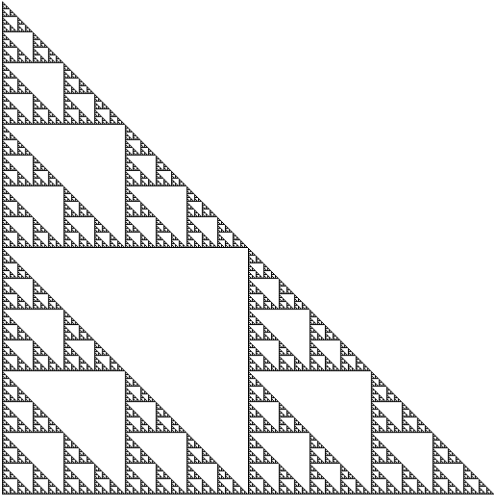
  - blanc si $\binom{m}{k} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{m}{k} \equiv 1 \bmod 2$

Renormaliser par une homothétie de rapport $1/2^n$
$\rightsquigarrow$ une suite de $[0,1] \times [0,1]$

Les éléments 0 à 5 de la suite



L'élément 9 de la suite



F. von Haeseler, H. O. Peitgen, G. Skordev (1992)

Cette suite converge, selon la distance de Hausdorff, vers le triangle de Sierpiński (lorsque n tend vers l'infini).

Définition :

- *ϵ-épaissi* d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$

$$[S]_\epsilon := \bigcup_{x \in S} B(x, \epsilon)$$

- $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_h)$ espace des compacts non vides de $\mathbb{R}^2$ muni de la *distance de Hausdorff* d_h

$$d_h(S, S') = \min\{\epsilon \in \mathbb{R}+ \mid S \subset [S']_\epsilon \quad \text{et} \quad S' \subset [S]_\epsilon\}$$

Espace complet

Questions :

- Après coloriage et renormalisation du triangle de Pascal généralisé, peut-on espérer avoir une convergence vers un objet limite similaire au triangle de Sierpiński ?
- Peut-on décrire cet objet limite ?

Table des matières

Représentations graphiques

Posons

$$L = \{\varepsilon\} \cup 1\{0,1\}^* = \{\varepsilon, 1, 10, 11, 100, 101, \ldots\}$$

- L est ordonné généalogiquement
- $w_n = \mathrm{rep}_2(n)$ le $n^{\text{ème}}$ mot de L
- Grille : intersection de $\mathbb{N}^2$ avec la région $[0, 2^n] \times [0, 2^n]$
- Colorier la grille : les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal généralisé

$$\left(\binom{w_m}{w_k} \bmod 2\right)_{0 \leq m,k < 2^n}$$

$\rightsquigarrow$ Définition de $(T_n)_{n\geq 0}$

Renormaliser par une homothétie de rapport $1/2^n$

$\rightsquigarrow$ Définition de $(U_n)_{n\geq 0}$ dans $[0,1] \times [0,1]$

Définition : $Q := [0,1] \times [0,1]$

- Pour tout $n \geq 0$

$$T_n := \bigcup \left\{ (\mathrm{val}_2(v), \mathrm{val}_2(u)) + Q \mid u, v \in L_n, \binom{u}{v} \equiv 1 \bmod 2 \right\} \subset [0, 2^n] \times [0, 2^n]$$

$\rightsquigarrow T_n$ compact (union finie de carrés unitaires)

- Pour tout $n \geq 0$

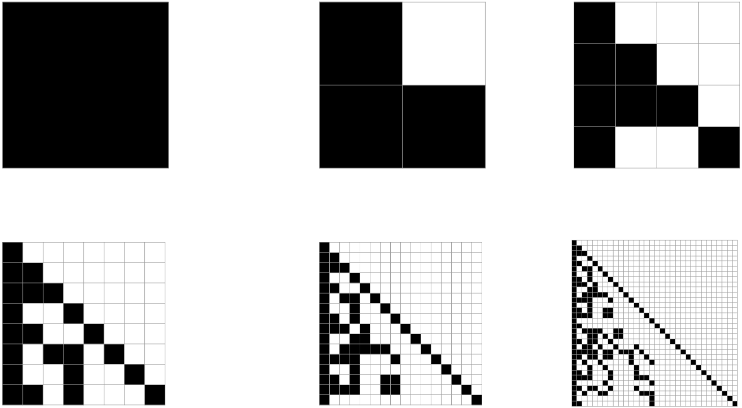
$$U_n := \frac{T_n}{2^n} \subset [0,1] \times [0,1]$$

$\rightsquigarrow U_n$ compact

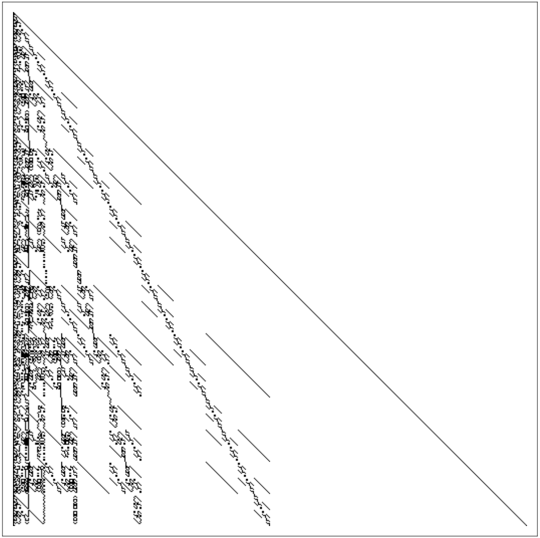
Lemme : Pour tout $n \geq 0$,

$$\# \left\{ (u,v) \in L_n \middle| \binom{u}{v} > 0 \right\} = 3^n.$$

Les ensembles U_0 à U_5



L'ensemble U_9



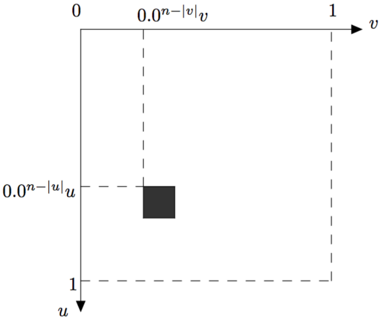
Observation : Segments de différentes pentes $1, 2, 4, 8, \cdots$

Convention : $u = u_1 \cdots u_n \in \{0,1\}^*$

$$0.u \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} u_i/2^i \in \mathbb{Q}$$

$n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} (u,v) \in L_n \times L_n & & \text{région carrée dans } U_n \\ \text{avec } \binom{u}{v} \equiv 1 \bmod 2 & \rightsquigarrow & (0.0^{n-|v|}v, 0.0^{n-|u|}u) + Q/2^n \subset U_n \end{array}$$



La condition $(\star)$

Soit $(u,v) \in L \times L$.
Le couple (u,v) satisfait la condition $(\star)$ si $(u,v) \neq (\varepsilon,\varepsilon)$,

$$\binom{u}{v} \equiv 1 \bmod 2, \ \binom{u}{v0} = 0 \text{ et } \binom{u}{v1} = 0.$$

<u>Lemme (Lothaire, 1997)</u> : Soient $u,v \in L$ et $a,b \in \{0,1\}$.
Alors

$$\binom{ua}{vb} = \binom{u}{vb} + \delta_{a,b}\binom{u}{v}.$$

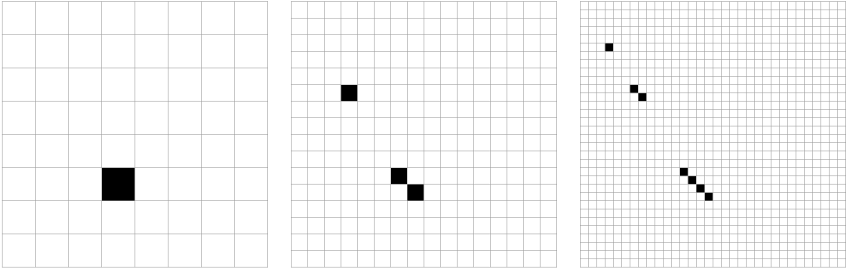
<u>Lemme</u> : Si $(u,v) \in L \times L$ satisfait $(\star)$,
alors $(u0,v0)$ et $(u1,v1)$ satisfont aussi $(\star)$.

Preuve : Par le lemme précédent,

$$\binom{u0}{v0} = \underbrace{\binom{u}{v0}}_{=0 \text{ par hyp.}} + \underbrace{\binom{u}{v}}_{\equiv 1 \bmod 2} \equiv 1 \bmod 2.$$

Si $\binom{u0}{v00} > 0$ ou $\binom{u0}{v01} > 0$, alors $v0$ apparaît dans u, contredisant la condition $(\star)$.

Conséquence du lemme



Convergence vers la diagonale du premier carré :

- La région carrée de taille $1/8$ noircie dans $U_3 \rightsquigarrow (101, 11)$ qui satisfait $(\star)$
- Deux régions carrées de taille $1/16$ dans U_4
- Quatre régions carrée de taille $1/32$ dans U_5

Chaque couple satisfait $(\star)$ par le lemme précédent

Définition : Soit $(u, v) \in L \times L$ tel que $|u| \geq |v| \geq 1$.
Segment $S_{u,v} \subset [1/2^{|u|-|v|+1}, 1/2^{|u|-|v|}] \times [1/2, 1]$

- de pente 1
- de longueur $\sqrt{2} \cdot 2^{-|u|}$
- d'extrémités

$$A_{u,v} := (0.0^{|u|-|v|}v, 0.u) \text{ et } B_{u,v} := (0.0^{|u|-|v|}v + 2^{-|u|}, 0.u + 2^{-|u|})$$

Proposition : Soient (u, v) et (s, t) satisfaisant $(\star)$.
Les segments $S_{u,v}$ et $S_{s,t}$

- soit l'un est inclus dans l'autre,
- soit d'intersection vide ou réduite à une extrémité commune.

Définition :

$$\mathcal{A}_0 := \overline{\bigcup_{\substack{(u,v) \\ \text{satisfaisant}(\star)}} S_{u,v}} \subset [0,1] \times [1/2,1]$$

$\rightsquigarrow$ Compact (fermeture d'une union dénombrable de segments)

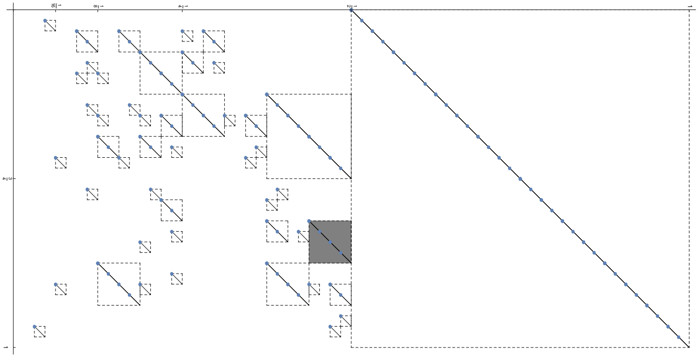
Une estimation de $\mathcal{A}_0$ obtenue avec des mots de longueur ≤ 6

Point : couple (u, v) satisfaisant $(\star)$ avec $|u| \leq 6$

Représentation de tous les segments $S_{u,v}$ correspondant

Proposition précédente : l'ensemble des segments est partiellement ordonné pour l'inclusion

Segments maximaux : diagonales des carrés en pointillé



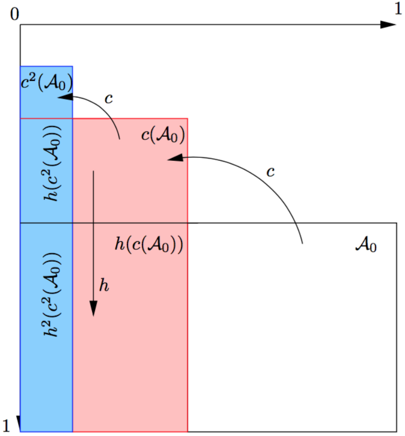
Définition de la suite $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$

Définition :

- c homothétie de centre $(0,0)$ et de rapport $1/2$
- $h : (x,y) \mapsto (x,2y)$
- $$\mathcal{A}_n := \bigcup_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq i}} h^j(c^i(\mathcal{A}_0))$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_n$ compact (modification de $\mathcal{A}_0$ via c et h)

Deux applications de c et h à partir de $\mathcal{A}_0$

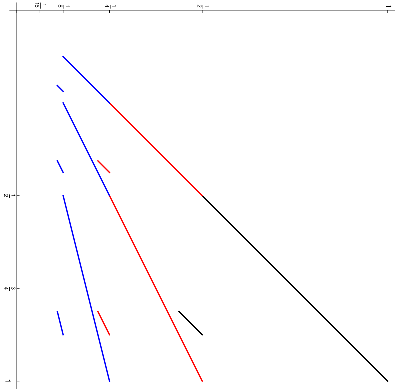


Propriété : Soient m, n avec $m \leq n$. Alors

$$\mathcal{A}_m \cap ([1/2^{m+1}, 1] \times [0, 1]) = \mathcal{A}_n \cap ([1/2^{m+1}, 1] \times [0, 1]).$$

Un sous-ensemble de $\mathcal{A}_2$

- En noir : deux segments d'origine dans $\mathcal{A}_0$
- En rouge : une application de c éventuellement suivie d'une application de h
- En bleu : deux applications de c suivies par au plus deux applications de h



Lemme : La suite $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.
Preuve (idée) : Soit $\epsilon > 0$. Soient $n > m$ suffisamment grands.

(1) $\mathcal{A}_m \subset [\mathcal{A}_n]_\epsilon$ car $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_n$

(2) $\mathcal{A}_n \subset [\mathcal{A}_m]_\epsilon$ car

- Propriété précédente :

$$\mathcal{A}_n \cap ([1/2^{m+1}, 1] \times [0,1]) \subset [\mathcal{A}_m]_\epsilon$$

- $[0, 1/2^{m+1}) \times [0,1] \subset \mathcal{A}_m \subset [\mathcal{A}_m]_\epsilon$ car

$$h^{m/2}(c^{m/2+j}(S_{1,1})) \subset \mathcal{A}_m \ \forall j \in \{0, \ldots, m/2\}$$

et

$$(1/2^{m/2+j+1}, 1/2^{j+1}) \text{ et } (1/2^{m/2+j}, 1/2^j)$$

donc $\mathcal{A}_m$ contient le segment d'extrémités

$$(1/2^{m+1}, 1/2^{m/2+1}) \text{ et } (1/2^{m/2}, 1)$$

Définition :

$$\underbrace{\begin{array}{c}(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0} \text{ de Cauchy} \\ (\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_h) \text{ espace métrique complet}\end{array}}$$

$\Rightarrow$ la limite de $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ est un compact bien défini noté $\mathcal{L}$

Une approximation de l'objet limite $\mathcal{L}$ obtenue avec des mots de longueur ≤ 8 et au maximum 4 applications des fonctions c et h

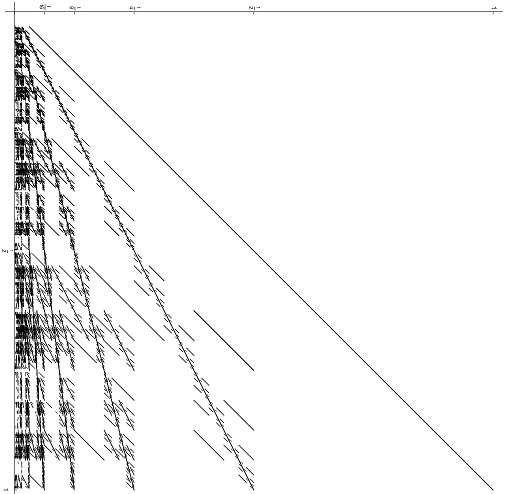


Table des matières

Théorème

La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\mathcal{L}$.

<u>Lemme</u> : Soit $\epsilon > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n+1} < \epsilon$

$$U_n \subset [\mathcal{L}]_\epsilon.$$

<u>Lemme</u> : Soit $\epsilon > 0$.
Pour tout $(x, y) \in \mathcal{L}$, il existe N tel que

$$d((x, y), U_n) < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Preuve du premier lemme

<u>Lemme</u> : Soit $\epsilon > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n+1} < \epsilon$

$$U_n \subset [\mathcal{L}]_\epsilon.$$

<u>Preuve</u> : Soit $\epsilon > 0$. Prenons n tel que $2^{-n+1} < \epsilon$.
Soit $(x, y) \in U_n$. Il existe $(u, v) \in L \times L$ tel que $\binom{u}{v} \equiv 1 \bmod 2$, $|u| \leq n$ et

$$(x, y) \in (0.0^{n-|v|}v, 0.0^{n-|u|}u) + Q/2^n.$$

Supposons que (u, v) satisfait $(\star)$. Alors le segment $S_{u,v}$ de longueur $\sqrt{2} \cdot 2^{-|u|}$ d'origine $A_{u,v} = (0.0^{|u|-|v|}v, 0.u)$ est dans $\mathcal{A}_0$.
Appliquons $n - |u|$ fois c à ce segment. Le segment $c^{n-|u|}(S_{u,v})$ de longueur $\sqrt{2} \cdot 2^{-n}$ et d'origine $(0.0^{n-|v|}v, 0.0^{n-|u|}u)$ est dans $\mathcal{A}_{n-|u|}$ et donc dans $\mathcal{L}$.
Ainsi, $d((x, y), \mathcal{L}) \leq \sqrt{2} \cdot 2^{-n} < \epsilon$.

Supposons que (u, v) ne satisfait pas $(\star)$.
Par hypothèse, il y a un nombre impair r d'occurrences de v dans u. Pour chaque occurrence de v dans u, on compte le nombre de zéros après celle-ci. On définit une suite d'indices

$$|u| \geq i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_r \geq 0$$

correspondant au nombre de zéros suivant la première, la deuxième, ..., la $r^{\text{ème}}$ occurrence de v dans u.

Soit k un entier tel que $k > \lceil \log_2 |u| \rceil$. On a

$$\binom{u0^{2^k}1}{v0^{2^k}1} = \sum_{\ell=1}^{r} \binom{2^k + i_\ell}{2^k}.$$

En effet, soit $\ell \in \{1, \ldots, r\}$. Considérons la $\ell^{\text{ème}}$ occurrence de v dans u, notée $v^{(\ell)}$. On a une factorisation

$$u = pw$$

où la dernière lettre de p est la dernière lettre de $v^{(\ell)}$ et $|w|_0 = i_\ell$. Avec $v^{(\ell)}$, on obtient des occurrences de $v0^{2^k}1$ dans $u0^{2^k}1$ en choisissant 2^k zéros parmi les $2^k + i_\ell$ zéros disponibles dans $w0^{2^k}1$. À cause du long bloc de $2^k (> |u|)$ zéros, il n'est pas possible d'avoir d'autres occurrences de $v0^{2^k}1$ que celles obtenues à partir des occurrences de v dans u.

Théorème (E. Lucas, 1878)

Soient m et n deux naturels et p un nombre premier.
Si

$$m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \cdots + m_1 p + m_0$$

et

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0$$

avec $m_i, n_i \in \{0, \ldots, p-1\}$ pour tout i,
alors

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \bmod p,$$

avec la convention : $\binom{m}{n} = 0$ si $m < n$.

Pour chaque $\ell \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$\binom{2^k + i_\ell}{2^k} \equiv 1 \bmod 2$$

Comme r est impair,

$$\binom{u0^{2^k}1}{v0^{2^k}1} = \sum_{\ell=1}^{r} \binom{2^k + i_\ell}{2^k} \equiv 1 \bmod 2.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > \lceil \log_2 |u| \rceil$, on vérifie que

$$(\underbrace{u0^{2^k}1}_{:=u_k}, \underbrace{v0^{2^k}1}_{:=v_k})$$

satisfait $(\star)$.

Comme dans la première partie, le segment S_{u_k,v_k} de longueur $\sqrt{2} \cdot 2^{-|u|-2^k-1}$ et d'origine $A_{u_k,v_k} = (0.0^{|u|-|v|}v0^{2^k}1, 0.u0^{2^k}1)$ est dans $\mathcal{A}_0$. Appliquons $n - |u|$ fois c à ce segment. Le segment $c^{n-|u|}(S_{u_k,v_k})$ de longueur $\sqrt{2} \cdot 2^{-n-2^k-1}$ et d'origine $(0.0^{n-|v|}v0^{2^k}1, 0.0^{n-|u|}u0^{2^k}1)$ est dans $\mathcal{A}_{n-|u|}$ et donc dans $\mathcal{L}$.

Ainsi, $d((x,y),\mathcal{L}) \leq \sqrt{2} \cdot 2^{-n} < \epsilon$.

Idée de la preuve du deuxième lemme

Lemme : Soit $\epsilon > 0$.
Pour tout $(x, y) \in \mathcal{L}$, il existe N tel que

$$d((x, y), U_n) < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Preuve (idée) : Soient $\epsilon > 0$ et $(x, y) \in \mathcal{L}$.

- $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\mathcal{L}$
  $\rightsquigarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq i \leq N_1$, (u, v) satisfaisant $(\star)$ et $(x_0, y_0) \in S_{u,v}$ tels que

$$d((x, y), h^j(c^i((x_0, y_0)))) < \epsilon/2.$$

- Pour tout n suffisamment grand,

$$d(h^j(c^i((x_0, y_0))), U_n) < \epsilon/2.$$

Rappel lemme : Si $(u,v) \in L \times L$ satisfait $(\star)$, alors $(u0, v0)$ et $(u1, v1)$ satisfont aussi $(\star)$.

Par ce lemme,

$$(uw, vw) \text{ satisfait } (\star)\ \forall w \in \{0,1\}^* \text{ avec } |w| = n$$

Rappel lemme (Lothaire, 1997) : Soient $u, v \in L$ et $a, b \in \{0, 1\}$. Alors
$$\binom{ua}{vb} = \binom{u}{vb} + \delta_{a,b}\binom{u}{v}.$$

Par ce lemme, au moins un des deux coefficients

$$\binom{uw0}{vw}, \binom{uw1}{vw}$$

est impair.

	v	$v0$	$v1$
u	0	0	0
$u0$		0	0
$u1$		0	0

	v	$v0$	$v1$
u	0	0	1
$u0$		0	1
$u1$		0	1

	v	$v0$	$v1$
u	0	1	0
$u0$		1	0
$u1$		1	0

	v	$v0$	$v1$
u	0	1	1
$u0$		1	1
$u1$		1	1

	v	$v0$	$v1$
u	1	0	0
$u0$		1	0
$u1$		0	1

	v	$v0$	$v1$
u	1	0	1
$u0$		1	1
$u1$		0	0

	v	$v0$	$v1$
u	1	1	0
$u0$		0	0
$u1$		1	1

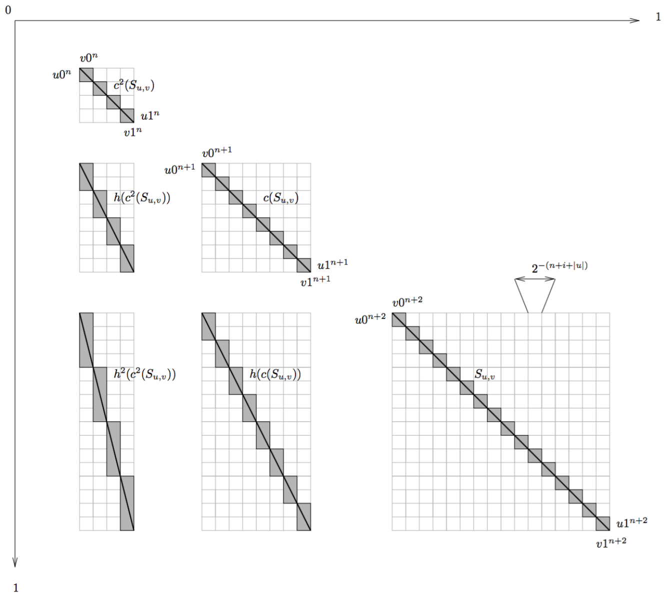
	v	$v0$	$v1$
u	1	1	1
$u0$		0	1
$u1$		1	0

Sous chaque 1, il y au moins un 1.

Itérer l'argument j fois : au moins un des 2^j coefficients

$$\binom{uwz}{vw} \text{ avec } |z| = j$$

est impair.



Chaque région grise : au moins une région noire

Le segment $h^j(c^i(S_{u,v}))$ intersecte chaque région carrée des régions grises.
Chaque point de $h^j(c^i(S_{u,v}))$ est à distance au plus

$$2^j/2^{n+i+|u|}$$

de $U_{n+i+|u|}$. Donc, pour tout n suffisamment grand,

$$d(h^j(c^i((x_0, y_0))), U_n) < \epsilon/2.$$

Au total, pour tout n suffisamment grand,

$$d((x, y), U_n) < \epsilon.$$

Conséquence du deuxième lemme

Conséquence de la preuve du deuxième lemme :
Si $(u, v) \in L \times L$ vérifie $(\star)$ et si $0 \leq j \leq i$

alors $\forall (f, g) \in h^j(c^i(S_{u,v}))$

$\exists ((f_n, g_n))_{n \geq 0}$ telle que

- $((f_n, g_n))_{n \geq 0}$ converge vers (f, g)
- $(f_n, g_n) \in U_n$ pour tout $n \geq 0$

Dans un espace métrique, toute suite convergente est de Cauchy.
$\rightsquigarrow ((f_n, g_n))_{n \geq 0}$ est de Cauchy

Théorème

La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\mathcal{L}$.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. Par le premier lemme, on sait que $U_n \subset [\mathcal{L}]_\epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

$\Rightarrow$ Il suffit de montrer que $\mathcal{L} \subset [U_n]_\epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{L}$, (x, y) est "proche" d'un point d'un segment $h^{\ell'}(c^\ell(S_{u,v}))$. La preuve du deuxième lemme montre qu'il existe une suite (de Cauchy) $((f_i(x, y), g_i(x, y))_{i\geq 0}$ telle que

$$(f_i(x, y), g_i(x, y)) \in U_i$$

pour tout i et qu'il existe $N_{(x,y)}$ tel que, pour tous $i, j \geq N_{(x,y)}$,

$$d((f_i(x, y), g_i(x, y)), (f_j(x, y), g_j(x, y))) < \epsilon/2$$

et

$$d((f_i(x, y), g_i(x, y)), (x, y)) < \epsilon/2.$$

Il est clair que

$$\mathcal{L} \subset \bigcup_{(x,y)\in\mathcal{L}} B((f_{N_{(x,y)}}(x,y), g_{N_{(x,y)}}(x,y)), \epsilon/2).$$

Puisque $\mathcal{L}$ est compact, on peut extraire un recouvrement fini de ce recouvrement ouvert : il existe

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \mathcal{L}$$

tels que

$$\mathcal{L} \subset \bigcup_{j=1}^{k} B((f_{N_{(x_j,y_j)}}(x_j, y_j), g_{N_{(x_j,y_j)}}(x_j, y_j)), \epsilon/2).$$

Posons $N = \max_{j=1,\dots,k} N_{(x_j,y_j)}$. Pour tout $j \in \{1,\dots,k\}$ et tout $n \geq N$,

$$B((f_{N_{(x_j,y_j)}}(x_j,y_j), g_{N_{(x_j,y_j)}}(x_j,y_j)), \epsilon/2) \\ \subset B((f_n(x_j,y_j), g_n(x_j,y_j), \epsilon).$$

En effet, si

$$d((x',y'),(f_{N_{(x_j,y_j)}}(x_j,y_j), g_{N_{(x_j,y_j)}}(x_j,y_j)) < \epsilon/2,$$

alors

$$\begin{aligned} &d((x',y'),(f_n(x_j,y_j), g_n(x_j,y_j)) \\ &\leq \underbrace{d((x',y'),(f_{N_{(x_j,y_j)}}(x_j,y_j), g_{N_{(x_j,y_j)}}(x_j,y_j)))}_{<\epsilon/2} \\ &+ \underbrace{d((f_{N_{(x_j,y_j)}}(x_j,y_j), g_{N_{(x_j,y_j)}}(x_j,y_j)),(f_n(x_j,y_j), g_n(x_j,y_j)))}_{<\epsilon/2 \text{ car } n, N_{(x_j,y_j)} \geq N_{(x_j,y_j)}} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \geq N$

$$\mathcal{L} \subset \underbrace{\bigcup_{j=1}^{k} B(\underbrace{(f_n(x_j, y_j), g_n(x_j, y_j))}_{\in U_n}, \epsilon)}_{\subset [U_n]_\epsilon}$$

$$\subset [U_n]_\epsilon.$$

Table des matières

Uniquement des coefficients binomiaux impairs

Extension à un contexte plus général :

$$p \text{ un nombre premier fixé}$$
$$r \in \{1, \ldots, p-1\}$$

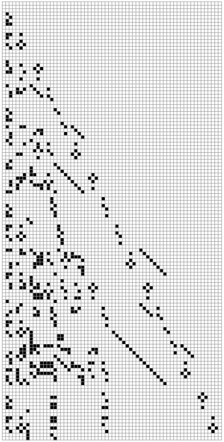
$$\begin{aligned} T_n \rightsquigarrow T_{n,r} &:= \bigcup \left\{ (\mathrm{val}_2(v), \mathrm{val}_2(u)) + Q \mid u, v \in L_n, \binom{u}{v} \equiv r \bmod p \right\} \\ &\subset [0, 2^n] \times [0, 2^n] \end{aligned}$$

$$U_n \rightsquigarrow U_{n,r} := \frac{T_{n,r}}{2^n}$$

$\rightsquigarrow$ Adaptation des raisonnements, constructions et résultats

Exemple avec $p = 3$

À gauche : $U_{7,2}$ (coefficients binomiaux congrus à 2 modulo 3)
À droite : une approximation de l'objet limite $\mathcal{L}$ correspondant



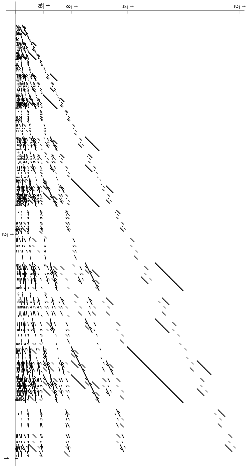


Table des matières

- J.-P. Allouche, V. Berthé, Triangle de Pascal, complexité et automates, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **4** (1997), 1–23.
- J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- B. Adamczewski, J. Bell, An analogue of Cobham's theorem for fractals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), no. 8, 4421–4442.
- A. Barbé, F. von Haeseler, Limit sets of automatic sequences, *Adv. Math.* **175** (2003), 169–196.
- J. Berstel, M. Crochemore, J.-É. Pin, Thue-Morse sequence and p-adic topology for the free monoid, *Discrete Math.* **76** (1989), no. 2, 89–94.
- A. Carpi, V. D'Alonzo, On the repetitivity index of infinite words, *International Journal of Algebra and Computation* **19** (2009), 145–158.
- A. Carpi, V. D'Alonzo, On factors of synchronized sequences, *Theoretical Computer Science* **411** (2010), 3932–3937.

- A Carpi, C. Maggi, On synchronized sequences and their separators, *RAIRO Theoretical Informatics and Applications* **35** (2001), 513–524.
- É. Charlier, J. Leroy, M. Rigo, An analogue of Cobham's theorem for graph directed iterated function systems, *Adv. Math.* **280** (2015), 86–120.
- H. Delange, Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres", *Enseignement Math.* **21** (1975), no. 1, 31–47.
- S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, vol. B, Academic Press, New York, (1976).
- K. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, New York, (1985).
- N. Fine, Binomial coefficients modulo a prime, *American Mathematical Monthly* **54** (1947), 589–592.
- F. von Haeseler, H.-O. Peitgen, G. Skordev, Pascal's triangle, dynamical systems and attractors, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **12** (1992), 479–486.

- M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, (1997).
- É. Lucas, Théorie des fonctions numériques simplement périodiques, *American Journal of Mathematics* **1** (1878), 197–240.
- R.D. Mauldin, S. Williams, Hausdorff dimension in graph directed constructions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **309** (1989), 811–829.
- J.-É. Pin, P. V. Silva, A noncommutative extension of Mahler's theorem on interpolation series, *European J. Combin.* **36** (2014), 564–578.
- I. Stewart, Four encounters with Sierpinski's gasket, *Math. Intelligencer* **17** (1995), 52–64.

Merci de votre attention !