SUR LA QUESTION 482

Par M. **E. Catalan.**

I

Au mois de décembre dernier, je reçus, de mon jeune Camarade Lemoine, une carte postale, contenant l'énoncé suivant :

x, y, z *étant des nombres entiers, le produit*

$$P = (x^2 + y^2 + z^2)(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)$$

est-il, toujours, la somme de trois carrés?

Peu après, M. Lemoine m'apprit que, en vertu d'une identité trouvée par notre ami Laisant

$$P = (x^2y \pm xz^2)^2 + (xy^2 \pm yz^2)^2 - [xyz \mp x^2z \mp y^2z]^2;$$

valeur qu'il est aisé de vérifier.

II

Considérons le produit

$$T = (t^2 + z^2)(t^2z^2 + x^2z^2).$$

La formule de *Fibonacci* (*) donne immédiatement,

$$T = z^2(t^2 \pm xy)^2 + t^2(z^2 \pm xy)^2.$$

Donc, si l'on prend

$$t^2 = x^2 + y^2 :$$

$$(1)\quad \begin{cases} T = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2z^2 + y^2z^2 + x^2y^2) = P \\ \quad = z^2(x^2 + y^2 \pm xy)^2 + x^2(z^2 \mp xy)^2 + y^2(z^2 \mp xy)^2, \end{cases}$$

conformément à la proposition de M. Laisant.

III

Dans l'identité

$$(2)\quad (t^2 + z^2)(t^2z^2 + x^2y^2) = z^2(t^2 \pm xy)^2 + t^2(z^2 \mp xy)^2,$$

prenons $\quad t^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2.$

Elle devient

$$(3)\,(^{**})\quad \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + w^2) \\ \qquad\qquad [(x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2)z^2 + x^2y^2] \\ = z^2(x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2 \pm xy)^2 + \\ \qquad\qquad (x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2)(z^2 \mp xy)^2. \end{cases}$$

(*) $\qquad (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' \pm bb')^2 + (ab' \mp ba')^2.$

(**) Le premier membre, développé, contient *trente-six* carrés ; le second *six* seulement.

IV

La relation (3), généralisée, peut être écrite ainsi :

$$(4)\quad (*)\left\{\begin{aligned}&(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)[x_1^2x_2^2+(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2)x_n^2]\\&=x_n^2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2\pm x_1x_2)^2\\&+(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2)(x_n^2\mp x_1x_2)^2.\end{aligned}\right.$$

V

Si l'on suppose

$$x_1=1,\qquad x_2=2,\ \ldots,\ x_n=n,$$

on a

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left[n+\frac{(n-1)\,n(n+1)}{6}\right]$$
$$=n^2\left[\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\pm 2\right]^2+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}(n^2\pm 2)^2;$$

puis, par des réductions successives :

$$(n+1)(2n+1)[24-(n-1)\,n^3\,(n-1)]$$
$$=n[(n-1)n(2n-1)\pm 12]^2+6(n-1)(2n-1)(n^2\mp 2)^2,$$
$$(n+1)(2n+1)[24+(n-1)n^3(2n-1)]$$
$$=n[(n-1)n(2n-1)\pm 12]^2+6(n-1)(2n-1)(n^2\mp 2)^2,$$
$$(n-1)(2n+1)[24+(n-1)n^3(2n-1)]$$
$$=(n-1)(2n-1)[n^3(n-1)(2n-1)+6n^4+24]+144n,$$
$$24(n+1)(2n+1)+(n-1)n^3(2n-1)6n$$
$$=(n-1)(2n-1)(6n^4+24)+144n,$$
$$(n+1)(2n+1)=(n-1)(2n-1)+6n;$$

ce qui est identique.

VI

Le produit P, *somme de trois carrés*, est aussi la *somme de quatre carrés* (**).

(*) D'après cette égalité (4), une *somme de* n^2 *carrés* est réduite à une *somme de* n *carrés*. On peut consulter, relativement à ce sujet, notre *Mémoire sur certaines décompositions en carrés* (Rome, 1884).

(**) Du moins si l'on ne fait pas d'hypothèses particulières sur x, y, z.

En effet, l'identité connue :

$$(5)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=(xx'+yy'+zz')^2 \\ +(xy'-yx')^2+(yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2 \end{cases}$$

cas particulier de celle d'Euler, donne

$$(6)\quad P=(3xyz)^2+x^2(y^2-z^2)^2+y^2(z^2-x^2)^2+z^2(x^2-y^2)^2$$

VII

Arrivons à la *Question* 482, qui est ainsi formulée :

La somme des carrés de trois nombres entiers, multipliée par la somme des doubles produits des carrés de ces nombres, est une somme de trois carrés entiers. (Lemoine.)

Représentons, pour abréger, l'identité (1) par

$$(x^2+y^2+z^2)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)=u^2+v^2+w^2.$$

On aurait donc, suivant M. Lemoine,

$$(x^2+y^2+z^2)(2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2)=u'^2+v'^2+w'^2;$$

et, en conséquence,

$$2(u^2+v^2+w^2)=u'^2+v'^2+w'^2.$$

Or, c'est seulement dans des cas très particuliers que *le double de la somme de trois carrés est une somme de trois carrés* (*).

L'énoncé rappelé ci-dessus semble donc inexact (**).

(*) Par exemple, si $u=v$.

(**) L'énoncé a été rectifié (p. 96) et la proposition qui correspond à cet énoncé rectifié est démontrée par l'identité (1).

En observant que

$$(A)\quad (x^2+y^2+z^2)(y^2z^2+z^2x+x^2y^2)\equiv x^2y^2z^2+(y^2+z^2)(z^2+x^2)(x^2+y^2),$$

la proposition en question se démontre immédiatement. En effet, le théorème de Fibonacci : « *Une somme de deux carrés multipliée par une somme de deux carrés est une somme de deux carrés* » prouve que le produit $(y^2+z^2)(z^2+x^2)(x^2+y^2)$ est une somme de deux carrés. D'après cela, le second membre de (A) est une somme de trois carrés.

On peut observer, d'ailleurs, que l'identité indiquée par M. Laisant pour résoudre la question posée par M. Lemoine est un cas particulier de l'identité de Lagrange. En effet, si, dans cette identité :

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)\equiv(aa'+bb'+cc')^2$$
$$+(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2,$$

on pose

$$a=x,\qquad b=y,\qquad c=z,$$
$$a'=zx,\qquad b'=yz,\qquad c'=xy,$$

on a

$$ab'-ba'=0;$$

et le second membre se réduit à une somme de trois carrés.

(G. L.)
