SUR LES BRANCHES INFINIES DES COURBES ALGÉBRIQUES

Par M. **E. Catalan.**

(*Suite*, voir p. 145.)

209. — Arrivons au cas général, et supposons que β soit une racine multiple de $F_0(y) = 0$. Désignons par i le degré de multiplicité de cette racine, de façon que $y = \beta$ annule $F_0(y)$ et ses $i - 1$ premières dérivées. Il peut arriver que cette valeur de y annule quelques-unes des quantités $F_1(y)$, $F_2(y)$,... ainsi que leurs dérivées; mais elle ne les réduira pas toutes à zéro. Soit $F_p(y)$ la première fonction dont les $i - 1$ premières dérivées ne s'évanouissent pas, avec cette fonction même, par l'hypothèse de $y = \beta$. En remplaçant, dans l'équation (1), y par $\varepsilon \pm h$, nous aurons

$$(6)\quad \begin{aligned} &(\pm h)^i \left[\frac{F_0^{(i)}(\beta)}{1.2\ldots i} + \varepsilon_0\right] x^m + \varepsilon_1 x^{m-1} + \varepsilon_2 x^{m-1} + \ldots \\ &+ (\pm h)^k \left[\frac{F_p^{(k)}(\beta)}{1.2\ldots K} + \varepsilon_p\right] x^{m-p} + \ldots = 0; \end{aligned}$$

k étant inférieur à i, et ε_1, ε_2, ... ε_p, ... étant des quantités qui s'évanouissent avec h.

210. — En répétant tous les raisonnements précédents, on conclura qu'en *général*, on peut attribuer à h une valeur assez petite, pour que l'équation (6) ait une racine réelle, plus grande que tout nombre donné. Cette conclusion sera fautive dans un seul cas, celui où l'on aurait, à la fois :

i — k *pair*, p *pair*, $F_0^{(i)}(\beta)$ *et* $F_p^{(k)}(\beta)$ *de même signe* (*).

Si ces diverses conditions sont remplies, il arrivera que *les deux termes principaux*, de l'équation (6), seront constamment de même signe. Donc, quand on fera croître indéfiniment x et décroître indéfiniment h, à partir de certaines valeurs N

(*) Il y a encore à examiner le cas où le premier terme, non divisible par $(y - \beta)^i$, est $F_m(y)$ (Note de 1849).

et y, le premier membre ne changera pas de signe ; donc *on ne pourra pas faire acquérir, à cette équation, une racine plus grande que* N. Dans ce cas, il ne sera plus permis de dire que, pour $y = \beta$, l'équation (1) a une racine infinie.

211. — La théorie qui vient d'être exposée permet évidemment, de reconnaître si une courbe algébrique donnée a des branches infinies, dont la *direction soit parallèle* à l'axe des x.

En ordonnant l'équation de cette courbe par rapport aux de y, on déterminera, semblablement, les branches infinies, dirigées parallèlement à l'axe des y.

212. — Pour obtenir les branches infinies, *obliques aux deux axes*, faisons, dans l'équation de la courbe, $x = u \cos \omega$, $y = u \cos \omega$, de manière à passer des coordonnées rectilignes, supposées rectangulaires, à des coordonnées polaires. L'équation transformée sera

$$(7) \qquad A_0 u^m + A_1 u^{m-1} + \ldots + A_m = 0;$$

$A_0, A_1, \ldots$ représentant des *fonctions homogènes de sin* ω *et cos* ω, respectivement des degrés $m, m-1, \ldots$

Cela posé, on peut raisonner sur l'équation (7), absolument comme sur l'équation (1). C'est-à-dire qu'après avoir tiré, de l'équation $A_0 = 0$, une valeur réelle α de l'angle ω, on remplacera ω par $\alpha + h$, et l'on examinera si, pour des valeurs de h suffisamment petites, l'équation (7) peut acquérir une racine réelle, plus grande qu'un nombre donné. Si cela arrive, on pourra, en suivant la courbe, se transporter (*) à une distance de l'origine des coordonnées, plus grande que toute quantité assignable. Donc la courbe aura une branche infinie, pans la direction représentée par $\omega = \alpha$.

213. — La transformée (7) est peu propre aux applications, parce qu'elle exige que l'on forme les dérivées des fonctions $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Mais il est bien facile de s'en passer. En effet, chacune des quantités $A_0, A_1, A_2, \ldots$ étant homogène en $\sin \omega$ et $\cos \omega$; si l'on pose $\operatorname{tg} \omega = t$, ces quantités seront remplacées par des fonctions entières de la variable t, respec-

(*) Par la pensée (mai 1889).

tivement multipliées par $\cos^m \omega$, $\cos^{m-1} \omega$, ... On aura, au lieu de l'équation (7),

$$F_0(t) \cos^m \omega . u^m + F_1(t) \cos^{m-1} x . u^{m-1} + \ldots = 0;$$

ou plutôt :

$$(8) \qquad F_0(t)x^m + F_1(t)x^{m-1} + \ldots = 0;$$

équation que l'on déduit de la proposée, en remplaçant y par tx.

214. — On obtiendra donc la direction suivant laquelle la courbe peut avoir des branches infinies, en appliquant, à l'équation (8), les règles indiquées ci-dessus. Les branches parallèles à l'axe des y peuvent seules faire exception, parce qu'elles répondent à $t = \infty$. On comprend, en effet, qu'en général, à cause de $x = u \cos \omega$, l'abscisse x et le rayon vecteur doivent devenir infinis en même temps. Mais si,

$$\omega = \frac{\pi}{2},$$

ce qui répond à $t = \infty$, x peut être finie pour une valeur infinie de u (*).

215. — *Applications...*

DES COORDONNÉES TRIPOLAIRES

Par M. Aug. **Poulain**, à Angers.

(*Suite et fin*, voir p. 155.)

VI. — *Valeurs de λ, μ, ν, en fonction des coordonnées rectangulaires X, Y. — Classification des courbes.*

52. — Le premier problème est résolu, pour une origine quelconque O′, par la formule (3) donnée ci-dessus

$$(3) \qquad \lambda^2 = (X - X_a)^2 + Y - Y_a)^2.$$

Le problème inverse est résolu par la formule

$$(82) \qquad 4SX = \Sigma(\lambda'^2 - \lambda^2)a_y,$$

qui comprend (59) comme cas particulier, et où l'on désigne

(*) La théorie qui vient d'être expliquée est tirée, en grande partie, du remarquable travail de M. Gorono, publié dans les tomes III et IV des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (Note de 1848).