SUR LES BRANCHES INFINIES DES COURBES ALGÉBRIQUES

Par **M. E. Catalan.**

M. Lucien Lévy vient de publier, dans le *Journal de Mathématiques*, un petit mémoire intitulé : « *Étude d'une courbe autour d'un point singulier* ». La lecture de ce travail m'a rappelé une *théorie des branches infinies*, que j'enseignais, en 1848, au Lycée Charlemagne (*). Les deux questions n'en font qu'une (**), au fond. Car si une courbe C possède une branche infinie, sa transformée C′, *par rayons vecteurs réciproques* (***) passe à l'origine, la rédaction du journal, convaincue qu'il peut être utile d'exposer, sous des formes différentes, une même théorie, a bien voulu donner l'hospitalité à la vieille Note suivante, tirée de l'ouvrage cité (****).

(*) *Mathématiques supérieures. — Application de l'algèbre à la géométrie* (352 p. in-4°, litographiées).

(**) Dans l'enseignement moderne, l'étude des points à l'infini se déduit de celle des points à distance finie en utilisant les formules de Newton *.

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{Y}{X}.$$

Dans cette transformation, qui est homographique, à une droite δ, correspond une droite Δ; à une courbe u, une courbe U. D'ailleurs, soit par des considérations géométriques, soit en se servant de la formule facile à démontrer

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = x^3 \frac{d^2y}{dx^2},$$

on établit le principe suivant :

A une branche Γ *de* U, *asymptote à une droite* Δ, *correspond, dans* u, *un bras* γ *tangent à la droite correspondante* δ; *de plus, les concavités se correspondent.*

Il faut entendre par là, qu'elles sont, en même temps, tournées vers la partie positive, ou vers la partie négative de l'axe des y.

On peut aussi utiliser les formules de la transformation réciproque.

$$xX = 1, \quad yY = 1;$$

Mais les formules de Newton donnent les résultats cherchés, plus rapidement.

* Ces formules ont été données par Newton dans le 1er livre des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (Lemme XXII) ; leur considération a conduit Waring aux formules générales de la transformation homographique (V. Chasles, *Traité des sections coniques*, p. 164). *(G. L.)*

(***) Pour abréger, on peut dire que les courbes C, C′ sont *inverses*.

(****) Pages 142 à 152.

199. — Soit

(1) $$F_0(y)x^m + F_1(y)x^{m-1} + \ldots + F_m(y) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique: $F_0(y)$, $F_1(y)$, ... $F_m(y)$ sont des polynômes entiers. Cherchons, en premier lieu, quels sont les caractères au moyen desquels on pourra reconnaître que l'équation (1) est vérifiée par une valeur *finie* de y, $y = \beta$, jointe à une valeur *infinie* de x. Cette recherche repose sur les considérations suivantes.

200. — Soit l'équation à une seule inconnue :

(2) $$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots Sx + T = 0.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que les coefficients B, C, ... S, T soient *constants*. Supposons, en outre, le coefficient A fonction d'une variable arbitraire a, de telle sorte que, pour une valeur réelle α, de ce paramètre, A devienne égal à zéro. Si, en donnant à a, une valeur $\alpha + h$, très peu différente de α, on fait acquérir, à l'équation (2), une racine réelle, positive ou négative, mais *très grande;* et si de plus cette racine, constamment réelle, croît au delà de toute limite quand h converge vers zéro, on dit que l'*équation* (2) *a une racine infinie pour* $a = \alpha$, *c'est-à-dire quand le coefficient* A *se réduit à zéro.*

Ainsi, l'équation $ax^3 - 1 = 0$, dans laquelle a est supposé *positif*, a une racine égale à $+\infty$ quand $a = 0$. Cette même équation admet une racine égale à $-\infty$ si, après avoir supposé a négatif, on fait $a = 0$.

201. — Pour que l'équation (2) *ait une racine infinie, il faut que le coefficient* A, *de son premier terme, soit égal à zéro.*

En effet, tant que ce coefficient est différent de zéro, on peut assigner une *limite supérieure*, soit des racines positives, soit des racines négatives.

202. — La condition $A = 0$ *n'est pas suffisante.*

Il suffit, pour justifier cette proposition, de considérer l'équation $a^2x^2 + 1 = 0$, dont les racines sont imaginaires, quelle que soit la valeur réelle attribuée au paramètre a.

L'équation $a^2x^4 + x^2 - 1 = 0$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires. Mais comme $+1$ et -1 sont *limites* des racines, il n'est pas permis de dire que cette équation a des racines infinies, pour $a = 0$.

203. — Après ces explications préliminaires, revenons à l'équation (1). Posons

$$(3) \qquad F_0(y) = 0.$$

Soit β une racine réelle de cette équation (3); et supposons d'abord qu'elle soit *simple*, c'est-à-dire que la dérivée, $F'_0(y)$, ne s'annule pas quand on fait $y = \beta$.

Remplaçons, dans le premier membre de notre équation (1), y par $\beta + h$, h étant une quantité fort petite. Il peut arriver, par suite de cette substitution, que quelques-uns des polynômes $F_1(y)$, $F_2(y)$ se réduisent à zéro; mais *ils ne s'annuleront pas tous*; car alors le premier membre admettrait le facteur $y - \beta$, ce que l'on ne doit pas supposer.

Soit $F_p(y)$ le premier coefficient qui ne s'annule pas pour $y = \beta$; alors notre équation deviendra

$$(4) \quad h[F'_0(\beta)+\varepsilon_0]x^m+\varepsilon_1 x^{m-1}+\varepsilon_2+\ldots+[F_p(\beta)+\varepsilon_p]+\ldots x^{m-p}=0.$$

Dans celle-ci, ε_0, ε_1, ... ε_p sont des quantités qui renferment h comme facteur, et qui, conséquemment, pourront devenir moindres que toute quantité donnée, quand on attribuera une valeur suffisamment petite à h.

204. — Remarquons, tout de suite, que pour appliquer nos raisonnements au cas d'une équation incomplète, il suffirait de supposer $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$,...

205. — Remarquons encore que l'on peut toujours disposer du signe de h et du signe de x, de manière à rendre *positif* le terme $hF'_0(\beta)$, et *négatif* le terme $F_p(\beta)x^{m-p}$. (On changera, s'il le faut, les signes de tous les termes.) Supposons que l'on ait fait cette *préparation*, et mettons les signes en évidence : l'équation (4) deviendra

$$(5) \quad h[F'_0(\beta)+\varepsilon_0]x^m+\varepsilon_1 x^{m-1}+\ \ldots -[F_p(\beta)+\varepsilon_p]x^{m-p}+\ldots=0.$$

206. — On sait que si un polynôme est ordonné suivant les puissances décroissantes d'une variable, x, il est toujours possible d'assigner, à cette variable, une valeur positive telle, que si x croît indéfiniment, à partir de cette valeur particulière, le polynôme conserve le signe de son premier terme, et croît au-delà de toute limite. Conséquemment, on peut trouver un nombre N qui, substitué à x, rende *positive* la quantité

$$h[F_0(\beta) + \varepsilon_0]x^m + \varepsilon_1 x^{m-1} + \ldots,$$

et *négative* la quantité

$$- [F_p(\beta) + \varepsilon_p]\, x^{m-p} + \dots$$

On peut, en outre, déterminer ce nombre N, de manière que tout nombre plus grand satisfasse aux mêmes conditions. Enfin, ce nombre N peut être choisi de telle sorte que chacun des termes $\varepsilon_1 x^{m-1}$, $\varepsilon_2 x^{m-2}$,... soit, relativement à $hF_0(\beta)$, aussi petit qu'on voudra.

En effet, si l'on veut que $\varepsilon_1 x^{m-1}$, par exemple, soit inférieur à $hF'_0(\beta)x^m\frac{1}{K}$, K étant un très grand nombre donné, il suffira de satisfaire à l'inégalité

$$\frac{\varepsilon_1}{h} < \frac{x}{KF'_0(\beta)}.$$

Or, ε_1 contenant h en facteur, le rapport $\frac{\varepsilon_1}{h}$ a pour limite une quantité *finie* λ (*). Donc ce rapport sera rendu moindre que $\frac{x}{KF'_0(\beta)}$, si l'on attribue à x une valeur suffisamment grande.

207. — Concevons que l'on ait remplacé, dans le premier membre de l'équation (5), x par un nombre N suffisamment grand. Ce premier membre prendra la forme

$$h[F_0(\beta) + E]N^m - [F_p(\beta) + E_1]N^{m-p},$$

en représentant par E, E_1, des quantités aussi petites qu'on voudra, et dont la première diminue indéfiniment avec h. On pourra, évidemment, trouver une valeur η, de h, telle, que la quantité qui vient d'être écrite soit négative. Donc, pour $x = N$, $h = \eta$, le premier membre de l'équation (5) est négatif. Et comme, en conservant cette même valeur η de h, on peut faire croître x, à partir de N, de manière à rendre ce premier membre positif, l'équation (5) aura une racine positive, plus grande que N.

En d'autres termes : *la quantité positive* h *peut être rendue assez petite pour que l'équation* (5) *ait une racine positive plus grande que tout nombre donné* N. C'est ce qu'il fallait démontrer.

(*) Ce raisonnement est peu rigoureux ; mais il est aisé de le rendre tel (mai 1889).

208. — Ajoutons que, *si l'on fait décroître indéfiniment* h, *à partir de* η, *la racine positive de l'équation* (5) *croîtra au delà de toute limite.*

En effet, si N' est la racine correspondant à $h = \eta$, on aura

$$\eta[F_0(\beta) + E]N'^m - [F_p(\beta) + E_1]N'^{m-1} = 0;$$

d'où, en remplaçant η par une quantité plus petite, η' :

$$\eta'[F'_0(\beta) + E]N'^{m-p} - [F_p(\beta) + E_1]\, N'^{m-p} < 0.$$

On devra donc, pour satisfaire à l'équation (5), dans laquelle on suppose $h = \eta'$, remplacer x par un nombre N'', supérieur à N'. *(A suivre).*

SUR LA CONSTRUCTION DES TANGENTES
AUX CUBIQUES ET AUX QUARTIQUES

Par M. **Duchêne**, élève à l'École Polytechnique.

On sait que Chasles (*) a indiqué une construction générale de la tangente en un point d'une courbe de degré quelconque. Mais il n'est pas sans intérêt de rechercher, pour des courbes particulières, des constructions plus simples que celles qui découlent de la solution générale donnée par Chasles, solution qui nécessite l'emploi d'un instrument de mesure (compas ou décimètre).

Nous donnerons deux constructions au moyen de la règle seulement 1° pour les cubiques, 2° pour les quartiques.

La première est fondée sur ce théorème connu : *Trois cubiques qui ont huit points communs en ont un neuvième.*

Si l'on considère *(fig. 1)* deux droites AC, FD coupant en A,B,C,D.E,F la cubique, sur les droites CD, BE, DF, il y aura trois autres points α, β, γ de la courbe. Ces points doivent être en ligne droite d'après le théorème précédent.

Si deux de ces points, C et D se réunissent, la tangente s'obtiendra comme nous allons l'indiquer. Par le point donné

(*) Chasles : *Aperçu historique*, in-4°, 1875, Paris. Pages 221 et 222; note au bas de la page.