$$\int_0^1 x^p dx$$

ne soit pas infinie.

Cette condition est réalisée tant que p est positif

Quand p est < 0, posons $p = -q$; l'intégrale devient

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^q}.$$

$\frac{1}{x^q}$ devenant infini à la limite inférieure, on reconnaît les cas où l'intégrale a une limite au moyen d'un théorème démontré dans tous les cours de calcul intégral (v. Serret, *Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 238). Il montre que l'intégrale a une limite, tant que l'on a

$$q < 1 \quad \text{ou} \quad p > = 1,$$

et qu'elle est infinie si $q \overset{=}{>} 1$.

Donc
$$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

tant que
$$p + 1 > 0.$$

M. Appell a montré (*Nouvelles Annales*, juillet 1887, p. 312) comment on peut former un polynôme entier $\varphi_p(x)$, qui pour des valeurs entières attribuées à p et x représente la somme, des p^{mes} puissances des n premiers nombres entiers. Il trouve que ce polynôme est de degré $p + 1$, et que le coefficient du premier terme est $\frac{1}{p+1}$; savoir :

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + Ax^p + \ldots$$

Il en résulte, pour x entier et infiniment croissant,

$$\lim \frac{\varphi_p(x)}{x^{p+1}} = \lim \frac{S_p}{x^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

ce qui démontre simplement le théorème, dans le cas des exposants entiers.

Cette propriété des polynômes de Bernoulli est, bien entendu, très connue, et depuis longtemps. G. L.

Extrait d'une lettre de M. Catalan.

... Voici quelques observations relatives au n° de septembre.

1° La série

$$\frac{1}{2L2} + \frac{1}{3L3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)L(n+1)} + \ldots$$

n'est pas la *série de M. Bertrand :* elle remonte, au moins, à l'illustre Abel (œuvres, 1^re^ édition, tome I^er^, p. 111).

2° La série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$$

pourrait (s'il était besoin) s'appeler *série de Catalan*. En effet, elle justifie cette remarque, dont je crois avoir la priorité :

Une série à termes alternativement positifs et négatifs, dont le terme général a pour limite zéro, peut être divergente (Traité élémentaire des séries, p. 29).

Nota. — J'ai, en effet (*Journal*, 1886, p. 164), nommé *série de M. Bertrand*, la série (1) ; parce que, comme je l'ai rappelé *(loc. cit.)*, elle a été, autrefois (*Journal de Liouville*, 1842), étudiée par ce Géomètre. Il n'y a pas, je pense, grand mal à cela. M. Catalan me fait observer, avec raison, que, dès 1827, Abel avait établi la divergence de cette série; il serait donc plus juste de la nommer *série d'Abel*, s'il n'y avait déjà une autre série (Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 324), ainsi désignée. Dans ces conditions, il vaudrait mieux lui donner une épithète justifiée par une de ses propriétés. Mon cher maître en propose-t-il une ?

D'après un renseignement que je dois à l'obligeance de M. Catalan, à propos de la question historique, ici soulevée, en 1827, L. Olivier avait énoncé cette règle fausse :

La série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente si

$$\lim nu_n = 0.$$

C'est alors qu'Abel, prenant pour exemple la série (1), a rédigé sa Note rectificative.

Pour ce qui concerne la série (2), M. Catalan a raison de croire que cette question a été posée pour constater que le candidat était au courant de la remarque rappelée ci-dessus (*). Voici, en effet, dans quels termes elle a été formulée :

La série

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \cdots$$

est-elle convergente ou divergente? Sur quels théorèmes s'appuie-t-on pour conclure la convergence ou la divergence d'une série alternée? La condition de décroissance constante et indéfinie du terme général est-elle suffisante? est-elle nécessaire? G. L.

ÉCOLE CENTRALE

(PREMIÈRE SESSION; JUILLET 1887)

— On considère toutes les coniques qui ont un foyer en un point donné F et qui passent par deux points donnés A et B.

1° Montrer que les coniques forment deux séries telles que, pour toute conique d'une série, la directrice correspondant au foyer F passe par un point fixe de la droite AB, situé entre A et B; tandis que, pour toute conique de l'autre série, la directrice correspondant au foyer F, passe par un point fixe de la droite AB, non situé entre A et B.

2° Trouver le lieu des centres des coniques considérées et montrer qu'il se compose de deux coniques homofocales.

3° Prenant un point C sur le lieu précédent, reconnaître, d'après la position qu'il occupe sur le lieu, si la conique considérée, dont le point C est centre, est telle que les points A et B sont sur une même branche ou sur deux branches différentes de cette conique.

4° Si le point C est tel que les points A et C soient sur une même branche de la conique considérée, reconnaître, d'après la position du point C, si cette conique et du genre ellipse ou du genre hyperbole, et, dans le premier cas, si les points A et B sont sur la branche voisine du point F, ou sur l'autre.

(*Nota.* — On prendra pour axe des x la droite AB et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite, menée par le milieu de AB.

(DEUXIÈME SESSION; OCTOBRE 1887)

— On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy.

$$OA = a \qquad OB = b.$$

1° Ecrire l'équation générale des paraboles qui passent par les trois points O, A, B. Montrer qu'en général, il passe par chaque point M du plan, deux de ces paraboles. Trouver le lieu des points M pour lesquels ces deux paraboles sont confondues, et indiquer la région du plan qui contient les points où il n'en passe aucune réelle.

(*) Voyez les feuilles publiées par la librairie Morant-Foucart (*admissibilité*, 1887, p. 16.)