En désignant par h' la distance du point O à Δ, la courbe V est représentée par l'équation

$$x^2 = \frac{(h^2 + h'y - y^2)^2}{(h + h' - y)(h - h' + y)}.$$

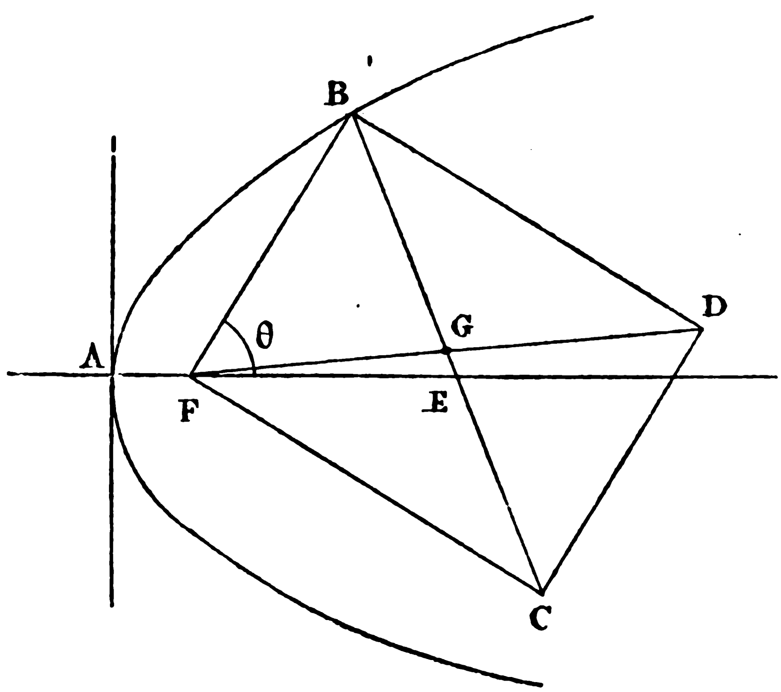
C'est une quartique unicursale ayant deux points doubles situés sur yy' et un troisième point double rejeté à l'infini, dans la direction xx'. L'un des points doubles situés sur yy' est toujours un nœud; l'autre est un point double isolé. La forme de cette courbe est rendue évidente par l'équation précédente et l'on voit qu'elle est constituée par deux branches hyperboliques aplaties de seconde espèce, se croisant sur yy', au nœud que nous avons signalé.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. CATALAN.

Votre *trisectrice* m'a fait songer à un vieux problème que j'ai resolu, peut-être bien, en 1832. En voici l'énoncé, tel que je le retrouve sur un papier *jauni par l'âge:*



Sur le rayon vecteur FB *d'une parabole, et avec la normale comme diagonale, on construit un rectangle* FBDC. *Trouver le lieu du point* D.

(Il est clair que ce lieu est l'*antipodaire de la parabole*; ce que j'ignorais dans ce temps-là).

1° D'après une propriété connue, le triangle BFE est isoscèle.

Donc $FBE = \frac{1}{2}(\pi - \theta.)$

2° D'après la construction, le triangle BGF est isoscèle. Donc $FB = \theta - \omega$, ω désignant l'angle DFE.

Conséquemment,

$$\pi - \theta = 2(\theta - \omega);$$

puis

$$\theta - \omega = \frac{\pi - \omega}{3},$$

ou

$$BFD = \frac{1}{3} AFD.$$

Connaissez-vous cette propriété *trisectrice* de la parabole?

Nota. — Je répondrai à M. Catalan que je n'ai pas souvenir d'avoir observé l'intéressante propriété qu'il me signale. Mais la lettre de mon maître et vieil ami soulève un exercice qui, au point de vue du calcul, présente quelque intérêt, ainsi que le prouveront, je pense, les développements suivants.

Soit AFD l'angle que nous voulons partager en trois parties égales. Prenons sur FA un point A, arbitrairement; puis, considérons la parabole qui a pour foyer F et pour sommet A. En prenant deux rayons vecteurs tels que FB, infiniment voisins, nous reconnaissons immédiatement que le lieu décrit par le point D se confond avec l'enveloppe des droites BD. Ainsi, et comme le remarque M. Catalan, le lieu du point D est l'antipodaire, ou, comme l'on dit aussi, la première podaire négative de la parabole, par rapport au foyer. On sait que cette courbe est une cubique; proposons-nous d'établir, par le calcul, l'identité de la courbe décrite par le point D avec l'enveloppe des droites BD.

Cherchons d'abord l'enveloppe des droites BD

Puisque

$$FB = \frac{p}{1 - \cos\theta},$$

l'équation de BD est

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{p}{1 - \cos \theta}. \qquad (1)$$

Prenons la dérivée de cette équation, par rapport à θ; nous avons

$$y \cos \theta - x \sin \theta = \frac{-p \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}. \qquad (2)$$

L'enveloppe des droites BD s'obtiendra en éliminant θ entre les équations (1) et (2); mais ce calcul présente certaines difficultés, s'il n'est pas dirigé comme nous allons l'indiquer.

Les équations (1) et (2) permettant d'exprimer x et y en fonction de $\sin \theta$ et de $\cos \theta$, nous reconnaissons ainsi que la courbe cherchée est unicursale. Il est donc naturel d'exprimer les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction d'un paramètre variable arbitraire. A cet effet, multiplions (1) et (2) respectivement par *cos* θ et $-$ *sin* θ, puis ajoutons, nous avons

$$x = p\,\frac{1 + 2 \cos \theta}{1 - \cos \theta},$$

ou

$$\cos \theta = \frac{x - p}{2p + x}, \qquad (3)$$

D'autre part, si nous faisons la somme des carrés des égalités (1) et (2), nous obtenons

$$x^2 + y^2 = p^2 \left\{\frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} + \frac{1 + \cos \theta}{(1 - \cos \theta)^3}\right\},$$

ou

$$2p^2 = (x^2 + y^2)(1 - \cos \theta)^3. \qquad (4)$$

Les égalités (3) et (4) donnent, finalement,

$$2\,(2p + x)^3 = 27p\,(x^2 + y^2). \qquad (A)$$

La courbe qui correspond à cette équation est facile à construire en observant que celle-ci peut s'écrire

$$27py^2 = (x - 4p)^2(2x + p).$$

Sous cette forme, on voit que cette équation représente une parabole cubique, à folium, ayant un nœud au point dont les coordonnées sont $(4p, 0)$.

Cherchons maintenant le lieu du point D.

Le triangle rectangle fBD donne

$$fB = fD \cos(\theta - \omega),$$

ou

$$\frac{p}{1 - \cos\theta} = \rho \cos(\theta - \omega).$$

Mais, comme le remarque M. Catalan, le triangle isoscèle fGB donne

$$\theta = \frac{\pi + 2\omega}{3}.$$

Ainsi le lieu du point D, en coordonnées polaires, est représenté par l'équation

$$\frac{p}{\rho} = \cos\frac{\pi - \omega}{3}\left(1 - \cos\frac{\pi + 2\omega}{3}\right). \qquad \text{(B)}$$

Pour montrer l'identité des courbes qui correspondent aux équations (A) et (B), il est naturel de convertir cette dernière en coordonnées cartésiennes. Mais cette transformation exige encore un certain effort de calcul qu'on peut sensiblement abréger en posant

$$\omega + \Omega = \pi.$$

L'équation (B) devient alors

$$\frac{p}{\rho} = \cos\frac{\Omega}{3}\left(1 + \cos\frac{2\Omega}{3}\right)$$

ou

$$\frac{p}{\rho} = 2\cos^3\frac{\Omega}{3}.$$

La relation connue

$$\cos\Omega = 4\cos^3\frac{\Omega}{3} - 3\cos\frac{\Omega}{3}.$$

donne d'abord

$$\cos\Omega = \frac{2p}{\rho} - 3\cos\frac{\Omega}{3},$$

puis, finalement,

$$2(2p + x)^3 = 27py^2.$$

Ainsi se trouve établie par l'analyse l'identité des deux lieux géométriques que nous avons considérés et cette cubique, antipodaire de la parabole par rapport au foyer, peut résoudre le problème de la trisection de l'angle, comme l'observe M. Catalan.

En effet, si nous imaginons que cette courbe ait été construite, en plaçant suivant AFD l'angle que l'on veut partager en trois parties égales, le folium de la courbe détermine le point D et le point B s'obtient alors en cherchant l'intersection du cercle décrit sur FD comme diamètre avec la tangente en D à la cubique considérée.

Mais cette construction, qu'il est peut-être possible de simplifier, est moins élégante que celle qui résulte de la trisectrice de Mac-Laurin.

ECOLE POLYTECHNIQUE (*)

CONCOURS DE 1885

Trigonométrie. — On donne les trois côtés d'un triangle :

$$a = 46751{,}38;\ b = 58047{,}29;\ c = 37694{,}06.$$

Déterminer les trois angles et la surface en hectares.

Géométrie descriptive. — Un cercle de 0^m10 de diamètre, situé dans le plan de front P, se projette horizontalement sur une parallèle au petit côté et à 0^m11 du bas de la feuille. Son centre se projette verticalement sur la ligne qui divise la feuille en deux parties égales dans le sens de sa longueur, à 0^m28 du bas. On le prend comme cercle générateur de 2 tores pleins ayant pour axes les tangentes à la circonférence en son point le plus à gauche et en son point le plus haut. 1° On tracera complètement l'intersection des deux surfaces, en indiquant les constructions effectuées pour en obtenir un point quelconque et la tangente en ce point. 2° On représentera par ses projections le solide commun aux deux tores en retranchant la partie de ce solide située en arrière d'un plan de front placé lui-même à 0^m02 en arrière du plan P.

Lavis. — Faire à l'encre de Chine et à teintes plates le lavis d'un cylindre terminé par deux demi-sphères.

La surface du solide sera supposée dépolie.

On ne passera pas de teinte sur le fond.

Les traits du cadre et les contours apparents du solide seront passés à l'encre avant de laver.

Le rayon lumineux est le rayon ordinaire à 45°.

(*) Voyez la première question (*Journal*, p. 159).