QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **E. Catalan.**

(*Suite*, voir page 37.)

10. — *Circonférence des neuf points* (fig. 4). — Supposons que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle FGH. La circonférence O devient *la circonférence des neuf points* (milieux des côtés, pieds des hauteurs, milieux des segments compris entre les sommets et le point de concours des hauteurs), relative à ce triangle. D'après le théorème (6), *cette circonférence contient les centres* $\alpha, 6, \gamma$ *des cercles inscrits aux annexes de* ABC; *et ces centres sont diamétralement opposés à* A, B, C. (*)

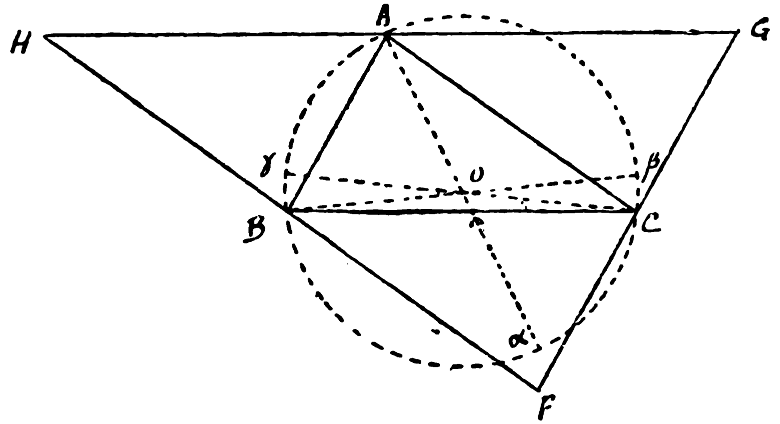


Fig. 4.

Voilà donc *trois* points ajoutés aux *neuf* (**) que l'on connaissait (***).

11. — *Cercles ex-inscrits aux annexes* (fig. 5). — A'A est la bissectrice de l'angle A' (6). Le côté BA, perpendiculaire à

(*) En outre, *les quadrilatères* AC'EO, EB'DO, DA'CO, CE'BO, BD'AO *sont inscriptibles.*

(**) Ou plutôt aux *quinze*. (*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6^me^ édit., p. 177.)

(***) Je fais abstraction, bien entendu, des points remarquables, *en nombre indéfini*, où la circonférence O touche certains cercles. *Loc. Cit.*, p. 181.

la bissectrice Bα de A′BC, est bissecteur de l'angle *extérieur* A′Bx. Pour la même raison, CA est la bissectrice de A′Cy.

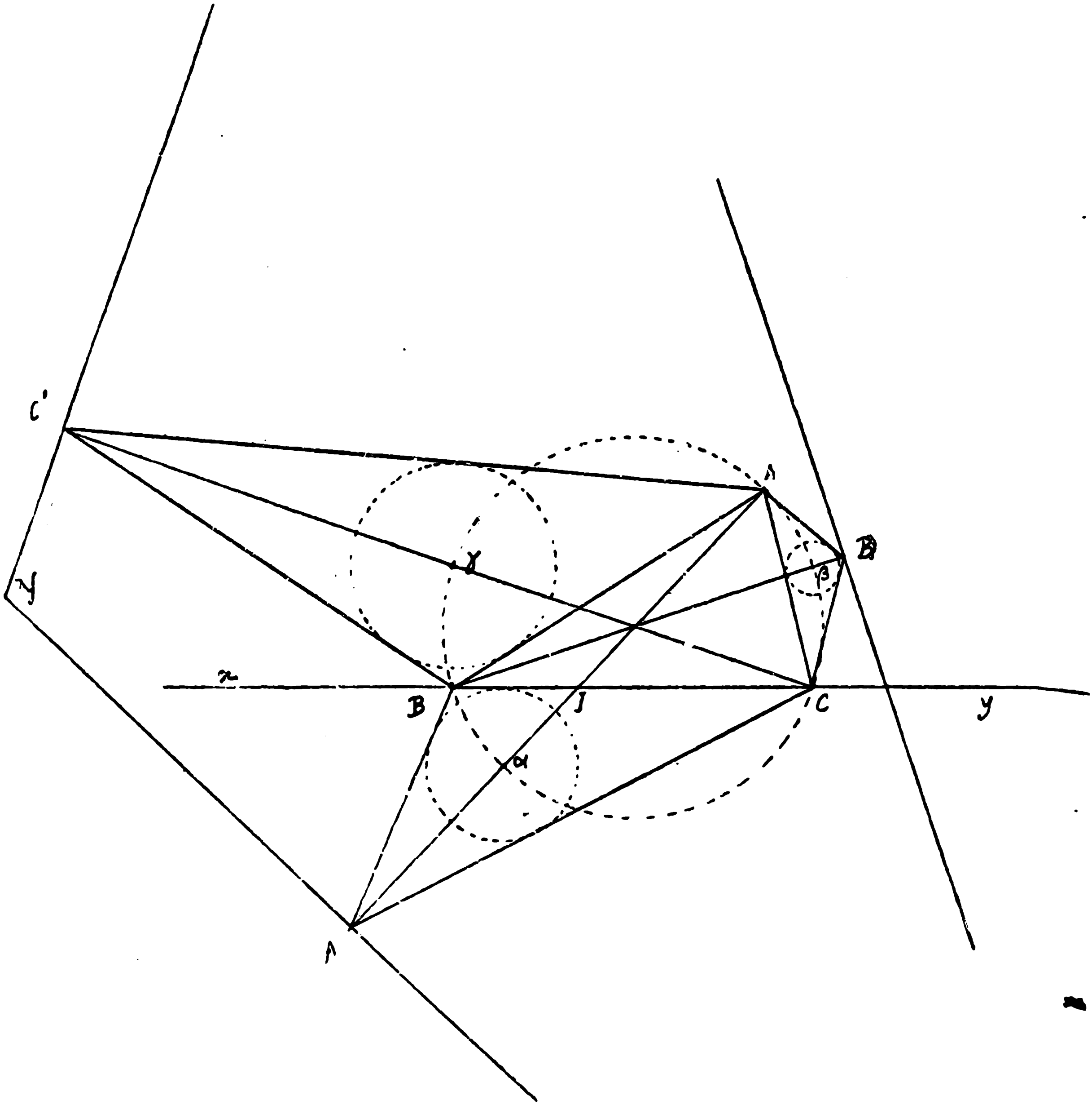


Fig. 5.

Donc A *est le centre du cercle ex-inscrit à l'annexe* BCA′, *tangent au côté* BC. *Le rayon de ce cercle est la hauteur* AH.

Considérons les deux autres cercles ex-inscrits à BCA′. Le centre de l'un est l'intersection de AB avec la droite YZ, menée par A′, perpendiculairement à A′A; le centre de l'autre est l'intersection de cette même droite YZ avec AC. Par conséquent :

Les centres des cercles ex-inscrits aux trois annexes sont :

1° *Les sommets du triangle* ABC;

2° *Les intersections des côtés de ce triangle avec les droites* YZ, ZX, ZY, *menées par* A′, B′, C′, *perpendiculairement à* A′A, B′B, C′C.

12. — Remarque. — Ces droites sont parallèles aux tangentes, en A, B, C, au cercle O.

13. — Lemme (fig. 6). — *Soit* ABC *un triangle isoscèle, inscrit à un cercle* O. *Si l'on trace la corde* AD, *coupant en* E *la base du triangle, on a*

$$AD.AE = \overline{AB}^2.$$

Menons le diamètre AOG et la corde GD. Le quadrilatère DEHG, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible(*). Donc

$$AD.AE = AG.AH.$$

D'après un théorème connu, le second membre égale $AB.AC = \overline{AB}^2$; donc la proposition est démontrée.

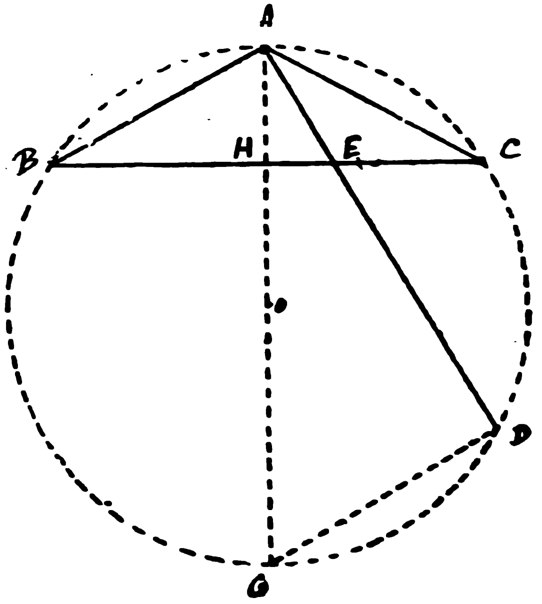


Fig. 6

14. — *Relation métrique.* — Le lemme précédent, appliqué à la figure 5, donne

$$OA' = \frac{OB.OC}{OI} = \frac{R^2}{OI},$$

puis

$$AA' = R\frac{AI}{OI},$$

ou

$$\frac{R}{AA'} = \frac{OI}{AI}.$$

(*) Autrement dit, les triangles ABG, AHE sont semblables.

De même $$\frac{R}{BB'} = \frac{OK}{BK'}, \quad \frac{R}{CC'} = \frac{OL}{CL}.$$

Par conséquent
$$\frac{R}{AA'} + \frac{R}{BB'} + \frac{R}{CC'} = \frac{OI}{AI} + \frac{OK}{BK} + \frac{OL}{CC}.$$

Mais il est connu (et évident) que la somme des trois derniers rapports se réduit à l'unité (*). Donc enfin
$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{R};$$
relation semblable à celle qui existe entre les rayons des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle (**). Par suite, on peut *construire un triangle dans lequel ces quatre rayons soient égaux à* R, AA', BB', CC' (***).

15. — Théorème. — *Si un triangle inscrit* ABC (fig. 5) *a un sommet fixe* A, *et que le côté* BC *passe par un point fixe* I, *appartenant au diamètre* Aα, *le sommet* A' *de l'annexe est invariable.*

En effet, on vient de voir que
$$OA' = \frac{R^2}{OI}.$$

16. — Remarques. — I. La réciproque est vraie : *Si le sommet* A' *est fixe, toutes les cordes* BC *passent par un point fixe, situé sur* AA'.

II. La propriété qui vient d'être démontrée complète l'une de celles qui l'ont été ci-dessus (7, 11).

III. Les points I, A' sont réciproques (****). Donc *la polaire du point* I *est la droite* YZ (II). De même ZX et XY sont les polaires des points L, K.

17. — *Hexagone de Brianchon* (fig. 7). — Les diagonales

(*) De là résulte que, *dans tout triangle rectiligne*,
$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$
Cette proposition, également connue, est facile à vérifier directement.

(**) *Théorèmes et Problèmes*..., p. 198.

(***) *Id.*, p. 116.

(****) *Éléments de Géométrie*, p. 114.

de l'hexagone A'CB'AC'B se coupent au point O. Donc *cet hexagone est circonscrit à une conique.*

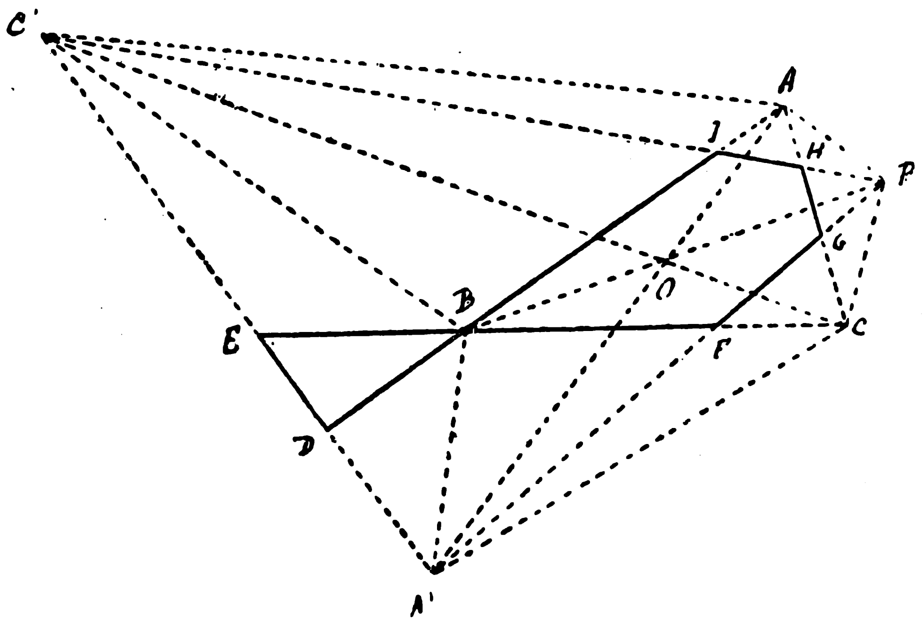


Fig. 7.

18. — *Hexagone de Pascal.* — En 1848, nous avons fait connaître un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon, sont les côtés d'un hexagone de Pascal (*).

On vient de voir que C'BA'CB'A est un hexagone de Brianchon. Donc les droites C'A', BC, A'B', CA, B'C', AB sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal. *Cet hexagone est* DEFGHI. Autrement dit, *les points* D, E, F, G, H, I *sont situés sur une conique.*

19. — *Circonférence des neuf points.* — Supposons, comme précédemment (10), que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle T (**). Soit O la circonférence des neuf points relative à T, et soient ABC', BCA', CAB' les annexes de ABC. Les dernières remarques donnent lieu à la proposition suivante :

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1852, p. 173 ; *Bulletins de l'Académie*, déc. 1878 ; etc.

(**) Non représenté sur la figure.

1° *L'hexagone* AC'BA'CB *est circonscrit à une conique ;*

2° *L'hexagone* DEFGHI, *formé par les intersections successives des droites* AB, C'A', BC, A'B', CA, B'C', AB, *est inscrit à une conique.*

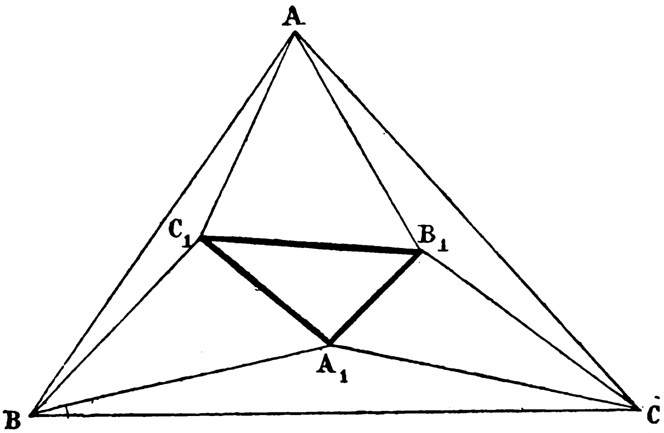
19. — REMARQUE. — Si, comme au n° 9, on remplaçait le triangle ABC par un polygone convenablement choisi, on pourrait généraliser les dernières propriétés. Mais en voilà assez sur ce sujet.

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. **A. Morel.**

(*Suite*, voir pages 10 et 33.)

8. — Si, sur les côtés AB, BC, CA, d'un triangle ABC, on construit des triangles isoscèles semblables ABC_1, CBA_1, CAB_1, les trois points A_1, B_1, C_1, sont les sommets d'un nouveau triangle. Nous allons chercher quelle est la valeur qu'il faut donner à l'angle φ à la base des triangles isoscèles pour que le triangle $A_1B_1C_1$ soit semblable au triangle ABC.



Appelons φ la valeur commune des angles à la base des triangles isoscèles AB_1C, BC_1A, CA_1B ; nous avons évidemment dans le triangle AC_1B_1 :

$$C_1B_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1AB_1 \cos(A - 2\varphi);$$

nous obtiendrons des valeurs analogues pour les deux autres côtés ; puis, en remplaçant AC_1, AB_1 par leurs valeurs en fonction des côtés du triangle primitif et de l'angle φ, nous aurons

$$C_1B_1^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A - 2\varphi)}{4\cos^2\varphi}.$$