rection, correspondant à un intervalle déterminé, est le produit de cette force par le chemin parcouru par son point d'application.

Des formules

$$s = at + \frac{bt^2}{2}, \quad V = a + bt$$

qui s'appliquent à ce dernier cas, on déduit, par l'élimination de t,

$$\frac{V^2 - a^2}{2} = bs$$

ou

$$\frac{mV^2 - ma^2}{2} = mbs = Ps,$$

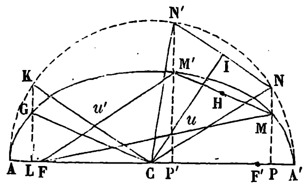
$P = mb$ étant la force qui agit sur le point mobile; donc, etc.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE LAMBERT;

PAR M. E. CATALAN.

1. Soit T le temps de la révolution, autour du Soleil F, d'une planète M. Soit t le temps qu'elle emploie à

Fig. 1.



parcourir l'arc MM' de sa trajectoire E. Le *théorème de Lambert,* dont nous allons donner une démonstration ([1]), consiste en ce que le rapport $\frac{t}{T}$ dépend seulement des trois quantités suivantes : *le grand axe* $2a$, *la corde* $MM' = c$, *et la somme* s *des rayons vecteurs* FM, FM'.

2. Soient $NCA' = \varphi$, $N'CA' = \varphi'$ les *anomalies excentriques*, relatives aux positions M, M' de la planète. On a, par une formule connue ([2]),

$$A = \tfrac{1}{2}ab[\varphi' - \varphi + e(\sin\varphi' - \sin\varphi)];$$

ou, si l'on mène CI perpendiculaire à NN', et que l'on fasse

$$\text{(1)} \qquad \varphi' - \varphi = 2\,ICN = 2\alpha, \quad \varphi' + \varphi = 2\,ICA' = 2\beta :$$

$$\text{(2)} \qquad A = ab(\alpha + e\sin\alpha\cos\beta).$$

La théorie de l'ellipse donne

$$u = a(1 + e\cos\varphi);$$

et, par conséquent,

$$s = a[2 + e(\cos\varphi + \cos\varphi')];$$

ou

$$\text{(3)} \qquad s = 2a(1 + e\cos\alpha\cos\beta).$$

3. Dans le trapèze M'P'PM,

$$\overline{MM'}^2 = \overline{PP'}^2 + (P'M' - PM)^2.$$

Or

$$PP' = a(\cos\varphi - \cos\varphi') = 2a\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\begin{aligned} P'M' - PM &= \frac{b}{a}(N'P' - NP) \\ &= b(\sin\varphi' - \sin\varphi) = 2b\sin\alpha\cos\beta; \end{aligned}$$

([1]) Démonstration *classique*, un peu simplifiée.
([2]) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 637.

donc

$$(4) \qquad c^2 = 4\sin^2\alpha(a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta),$$

ou

$$(5) \qquad c^2 = 4a^2\sin^2\alpha(1 - e^2\cos^2\beta).$$

4. On déduit, des équations (5) et (3),

$$\frac{c^2}{4a^2} - \left(\frac{s}{2a} - 1\right)^2 = \sin^2\alpha(1 - e^2\cos^2\beta) - e^2\cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$= \sin^2\alpha - e^2\cos^2\beta,$$

ou

$$(6) \qquad \cos^2\alpha + e^2\cos^2\beta = 1 - \frac{c^2}{4a^2} + \left(\frac{s}{2a} - 1\right)^2.$$

De plus, par l'équation (3),

$$(7) \qquad \cos\alpha . e\cos\beta = \frac{s}{2a} - 1 \quad (^1).$$

Conséquemment,

$$(\cos\alpha + e\cos\beta)^2 = \frac{s^2 - c^2}{4a^2},$$

$$(\cos\alpha - e\cos\beta)^2 = \frac{(4a - s)^2 - c^2}{4a^2},$$

$$\cos\alpha + e\cos\beta = \frac{1}{2a}\sqrt{s^2 - c^2},$$

$$\cos\alpha - e\cos\beta = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a - s)^2 - c^2}.$$

Pour simplifier la dernière expression, posons

$$(8) \qquad \mathrm{F'M} = v, \quad \mathrm{F'M'} = v', \quad v + v' = s'.$$

Il résulte, de cette formule,

$$(9) \qquad s + s' = 4a,$$

(1) Nous adoptons les signes qui répondent à la disposition de la figure.

puis

$$\cos\alpha - e\cos\beta = \frac{1}{2a}\sqrt{s'^2 - c^2}.$$

Les valeurs des inconnues sont donc, finalement,

$$(10)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{4a}\left(\sqrt{s^2 - c^2} + \sqrt{s'^2 - c^2}\right), \\ e\cos\beta = \dfrac{1}{4a}\left(\sqrt{s^2 - c^2} - \sqrt{s'^2 - c^2}\right). \end{cases}$$

5. Soit $E = \pi ab$ l'aire de l'ellipse. D'après la formule (2),

$$\frac{A}{E} = \frac{1}{\pi}(\alpha + \sin\alpha . e\cos\beta);$$

et, par la deuxième loi de Kepler,

$$(11)\qquad \frac{t}{T} = \frac{1}{\pi}(\alpha + \sin\alpha . e\cos\beta).$$

Le théorème de Lambert est démontré; car α et $e\cos\beta$ sont fonctions des seules quantités a, c, s [1].

Remarques.

6. Soit, dans le cercle AN'NA', CK perpendiculaire à CI. Soit G le point de l'ellipse, correspondant à K. On a, L étant le pied de l'ordonnée KG :

$$CL = a\sin\beta, \quad LK = a\cos\beta, \quad LG = b\cos\beta;$$

puis

$$CG = \sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta} \quad (^2).$$

D'ailleurs, si l'on appelle C la corde NN' :

$$C = 2a\sin\alpha.$$

---

[1] Formules (9) et (10)

[2] Expression connue.

La relation (4) peut donc être écrite ainsi :

$$\frac{c}{C} = \frac{CG}{CK}.$$

Pour une autre ellipse, ayant même grand axe que la première, on aurait

$$\frac{c'}{C} = \frac{CG'}{CK};$$

puis

$$\frac{c}{c'} = \frac{CG}{CG'}.$$

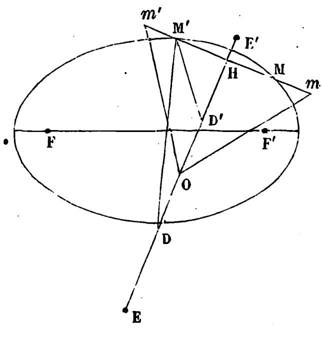
Et comme CG, *conjugué du diamètre passant au milieu de* MM′, est parallèle à MM′, nous pouvons énoncer ce petit théorème, presque évident :

Si l'on considère, dans deux ellipses ayant un axe commun, deux cordes comprises entre mêmes ordonnées, ces cordes sont entre elles comme les diamètres qui leur sont respectivement parallèles.

7. Sur la perpendiculaire au milieu H de MM′, prenons les points D, D′, de manière que

$$M'D = MD = \frac{s}{2}, \quad M'D' = MD' = \frac{s'}{2}.$$

Fig. 2.



A cause de

$$M'D + MD = s = u + u',$$

le point D *appartient à une ellipse passant en* F, *et dont les foyers sont* M, M′.

Inversement, pour ainsi dire, D, D′ *sont les foyers d'une ellipse* E′, *passant en* M, M′. Cherchons les éléments de cette courbe.

En premier lieu, le grand axe

$$\mathrm{EE}' = \mathrm{M'D} + \mathrm{M'D'} = \tfrac{1}{2}(s + s') = 2a.$$

Ainsi, *les grands axes des ellipses* E, E′ *sont égaux entre eux*.

D'autre part, O étant le centre de E′ :

$$\mathrm{OD} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{HD} - \mathrm{HD'}) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{s^2 - c^2} - \sqrt{s'^2 - c^2}\right);$$

ou, par la formule (10) :

$$\mathrm{OD} = ae\cos\beta = ae', \tag{12}$$

e' étant l'excentricité de E′.

De cette relation (12), on conclut

$$\mathrm{DD'} = \mathrm{FF'}\cos\beta :$$

la distance des foyers D, D′ *égale la projection, sur* CI (*fig.* 1), *de* FF′.

8. Ce n'est pas tout :

$$\mathrm{OH} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{HD} + \mathrm{HD'}) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{s^2 - c^2} + \sqrt{s' - c^2}\right);$$

ou, par la première des formules (10),

$$\mathrm{OH} = a\cos\beta = \mathrm{CI}.$$

9. Prenons, sur MM′ (*fig.* 2), de part et d'autre du point H,

$$\mathrm{H}m' = \mathrm{H}m = \mathrm{IN'} = \mathrm{IN},$$

et tirons Om', Om. Les triangles isoscèles $m'm$O, N′NC sont égaux, comme ayant même base et même hauteur.

Dès lors, l'angle m'OH (*fig.* 2), anomalie excentrique de M', relativement au foyer D, égale α [1]

$$\frac{s}{2} = a(1 + e\cos\alpha\cos\beta) = a(1 + e'\cos\alpha).$$

10. Imaginons l'ellipse E', transportée parallèlement à elle-même, de manière que son foyer D coïncide avec le foyer F (*fig.* 1). Soit $M_1 M'_1$ la nouvelle position [2] de l'arc MM'. Soit T_1 le temps de la révolution. D'après la troisième loi de Kepler, $T_1 = T$.

Conséquemment,

$$\frac{t_1}{T} = \frac{A_1}{E'};$$

puis

$$\frac{t_1}{t} = \frac{A_1}{A}\,\frac{E}{T'},$$

A_1 étant l'aire du secteur elliptique $M_1 F M'_1$.

Or, par la formule (2), dans laquelle $e\cos\beta = e'$,

$$A = ab(\alpha + e'\cos\alpha),$$
$$A_1 = ab'(\alpha + e'\cos\alpha);$$

donc

$$\frac{A}{A_1} = \frac{b}{b'} = \frac{E}{E'};$$

puis

$$t_1 = t.$$

Ainsi *deux planètes, sollicitées par le Soleil* F, *décriraient, dans des temps égaux, les arcs inégaux* MM', $M_1 M'_1$ [3], *appartenant aux ellipses* E, E_1.

11. Le lieu du centre *virtuel* O_1 est la circonférence décrite sur FC comme diamètre. Conséquemment, le

---

[1] Cette propriété résulte aussi de la formule (3).

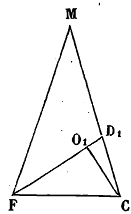
[2] Non représentée sur la figure.

[3] Ces arcs ont des cordes égales.

lieu du sommet E'_1 est une *conchoïde* de cette circonférence.

Soit D_1 le second foyer de l'ellipse E_1. Soit M le point

Fig. 3.



de cette courbe situé sur le prolongement de CD_1. On a

$$FM + MD_1 = 2a;$$

et, comme le triangle FCD_1 est isoscèle :

$$FM + MC = 2a + k.$$

D'après cette égalité, le point M de l'ellipse variable, appartient à une ellipse fixe, ayant F, C pour foyers, et dont le grand axe égale $2a + k$. Ces deux courbes se touchent en M; donc *l'enveloppe des ellipses variables est l'ellipse fixe*.

SUR UNE COMMUNICATION DE M. TCHÉBYCHEW AU CONGRÈS DE CLERMONT-FERRAND (1);

PAR M. E. CESARO.

I. Ayant posé, pour abréger,

$$w_x = u_{k(x-1)+1} + u_{k(x-1)+2} + u_{k(x-1)+3} + \ldots + u_{k(x-1)+k-1},$$

(1) 21 août 1876.